





# Granulare Dynamik unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation – Vergleich zwischen Experiment und Simulation

Von der Universität Bayreuth  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Tobias Schnautz

geboren am 16. September 1975 in Olpe

1. Gutachter:	Prof. Dr. I. Rehberg
2. Gutachter:	Prof. Dr. E. Rößler
Tag der Einreichung:	20. 04. 2005
Tag des Kolloquiums:	14. 07. 2005





# Granular dynamics under horizontal vibration – Comparison between experiment and simulation

**Abstract.** The behavior of spheres rolling on a circularly vibrating table in a circular container is observed. Depending on filling fraction and amplitude three phases can be verified, characterized by the spheres' behavior: the plastic-like state, the liquid-like state and the solid-like state. The critical filling fractions for the plastic-liquid transition and the liquid-solid transition decrease with an increasing amplitude. The crystallization of the spheres turns out to be a counterintuitive phenomenon as it happens when increasing the vibration amplitude and thereby the energy input. The different behavior of the spheres in the three phases is also visible in their corresponding velocity distributions. Due to inelastic collisions the mean velocity of the spheres is reduced when increasing the filling fraction. In addition, transport effects in a monolayer consisting of a binary mixture are studied. Depending on the ratio of the particles' material density and size, migration of the larger particles occurs either towards the boundary or to the center of the circular container. Complementary to the experimental investigations, computer simulations of a theoretical model are performed in order to pinpoint the relevant parameters responsible for the granular behavior.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Dynamik eines angeregten Granulats</b>	<b>15</b>
2.1	Horizontal linear angeregtes Granulat . . . . .	15
2.2	Horizontal kreisförmig angeregtes Granulat . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau und Messtechniken</b>	<b>23</b>
3.1	Der Schwenkaufbau . . . . .	23
3.2	Das Granulat . . . . .	26
3.3	Bilderfassung . . . . .	28
3.4	Bildanalyse und Messtechnik . . . . .	29
3.5	Regelung der Luftfeuchtigkeit . . . . .	34
3.6	Durchführung einer Messung . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>37</b>
4.1	Phasenübergänge . . . . .	37
4.1.1	Die plastische Phase . . . . .	38
4.1.2	Die fluidartige Phase . . . . .	39
4.1.3	Die festkörperartige Phase . . . . .	41
4.1.4	Fluidisierung - Der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase . . . . .	43
4.1.5	Kristallisation - Der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase . . . . .	50
4.1.6	Vollständige Kristallisation . . . . .	60
4.1.7	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	63

4.2	Geschwindigkeitsverteilungen . . . . .	65
4.2.1	Variation der Füllichte $\mu$ . . . . .	66
4.2.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	73
4.2.3	Die Kristallisation der Kugeln . . . . .	80
4.3	Segregation – Der horizontale Paranusseffekt . . . . .	85
4.3.1	Die Effekte . . . . .	87
4.3.2	Ergebnisse . . . . .	89
4.3.3	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Simulation</b>	<b>101</b>
5.1	Ablauf des Programms . . . . .	104
5.2	Das Stoßgesetz . . . . .	108
5.3	Variation der Amplitude $A$ und der Frequenz $\nu$ . . . . .	111
5.4	Variation von $\alpha_D$ und $\mu_G$ . . . . .	120
5.5	Bestimmung von $\alpha_D$ und $\mu_G$ . . . . .	132
5.6	Vergleich zwischen Simulation und Experiment . . . . .	135
5.6.1	Die drei Phasen . . . . .	135
5.6.2	Fluidisierung . . . . .	137
5.6.3	Kristallisation . . . . .	140
5.6.4	Geschwindigkeitsverteilungen . . . . .	143
5.6.5	Der horizontale Paranusseffekt . . . . .	148
5.6.6	Fazit . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Bestimmung kritischer Füllichten</b>	<b>159</b>
A.1	Kristallisation . . . . .	159
A.2	Vollständige Kristallisation . . . . .	160
<b>B</b>	<b>Softwareauszüge</b>	<b>163</b>
B.1	Bestimmung der Kugelgeschwindigkeiten . . . . .	163
B.2	Simulation . . . . .	168

# Kapitel 1

## Einleitung

Schon seit Jahrhunderten nehmen die Menschen enorme Kosten und einen extrem hohen Zeitaufwand in Kauf, um das Verhalten stoßender Partikel, wie im Falle des Ringsystems des Saturn, zu verstehen (Abb. 1.1). Rund 3,5 Milliarden Dollar und mehr als 20 Jahre Planungsarbeit von über 250 Wissenschaftlern aus 17 Nationen verschlang das Cassini-Huygens-Projekt, um im Jahr 1997 die siebenjährige Reise zum zweitgrößten Planeten unseres Sonnensystems anzutreten. Umso erstaunlicher erscheinen diese Mühen, da es sich bei dem Aufsehen erregenden Ringsystem lediglich um eine Ansammlung von Materiebrocken handelt.

Seit seiner Entdeckung vor rund 400 Jahren durch Galilei Galileo gibt das Ringsystem der Wissenschaft Rätsel auf. Nach diversen Fehlinterpretationen von nahe stehenden Monden bis hin zu fest sitzenden “Henkeln” am Saturn, erklärte erst Christian Huygens in den 60er Jahren des 17. Jahrhunderts, es handele sich um eine dünne zusammenhängende Materiescheibe, die den Planeten in der Äquatorialebene umkreise. Jean Dominique Cassini entdeckte 1675 ein dunkles Band in der Scheibe, die Cassinische Teilung. Dies führte wiederum erst gute 100 Jahre später dazu, dass Pierre Simon de Laplace vorschlug, dass die den Saturn umgebende Scheibe aus mehreren Einzelringen bestehen müsse, da eine zusammenhängende Scheibe durch Schwerkraft und rotationsbedingte Zentrifugalkraft auseinander gerissen würde. Mathematisch berechnet und experimentell nachgewiesen werden konnte dies allerdings erst 1857 durch James Clerk Maxwell.

Unter anderem durch Forschungsmissionen der NASA (Pioneer 11, Voyager 1 und 2) in den Jahren 1974-79 ist bekannt, dass sich die Ringe aus Milliarden von Partikeln zusammensetzen. Diese bestehen hauptsächlich aus Wassereis und ihre Größe reicht von der eines Staubkorns bis hin zu mehreren Metern großen Brocken (Schmidt & Salo 2003). Die Ringstruktur weist aufgrund gravitativer Wechselwirkungen mit den zahlreichen Monden und bedingt durch Gravitations-

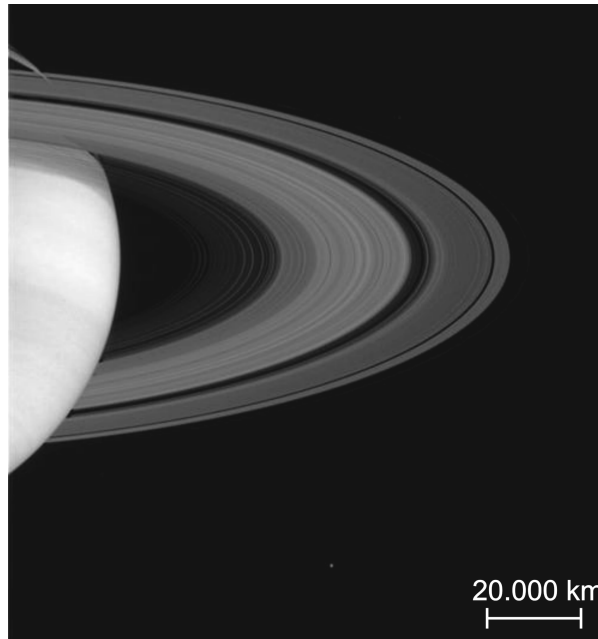


Abbildung 1.1: Foto des Saturn und seines Ringsystems. Das Bild wurde am 21.06.2004 aus einer Entfernung von 26,3 Millionen km von der Cassini-Sonde aufgenommen. Entnommen von der Cassini-Huygens-Homepage (Cassini 2005).

resonanzen<sup>1</sup> größere und kleinere Lücken auf und nimmt eine elliptische Gestalt an. Eine ausführliche Darstellung dieser Effekte ist in Esposito (2002) zu finden.

In den nächsten vier Jahren wird das jüngste Projekt der NASA/ESA, die Doppelsonde Cassini-Huygens, neue Erkenntnisse über Zusammensetzung und Struktur des Saturn, des umgebenden Ringsystems und seiner Monde bringen. Bezüglich des Ringsystems hat die Mission schon jetzt mehrere Erkenntnisse erbracht. Zum einen ist neben den sieben bekannten Ringen ein neuer, bisher unentdeckter Ring lokalisiert worden, zum anderen kann innerhalb der Ringe eine Feinstruktur beobachtet werden. Die bisher mit den Anfangsbuchstaben ihrer Entdecker benannten Ringe bestehen aus mehr als 100.000 einzelnen Ringen, die ca. 7.000 km über der Saturnoberfläche beginnen und an ihrem äußeren Rand einen Durchmesser von rund 1.000.000 km erreichen. Die Dicke der Ringe beträgt durchschnittlich aber nur etwa 1 km, was einem Verhältnis von 1 : 1.000.000 entspricht. Zum Vergleich entsprechen Dicke und Breite einer Rasierklinge einem Verhältnis von etwa 1 : 10.000. Innerhalb der Ringe konnten Dichtewellen entdeckt werden und es wurde beobachtet, dass der Mond Prometheus den Ringen

---

<sup>1</sup>Der Ausdruck Resonanz wird verwendet, wenn die Umlaufdauer eines Ringpartikels im Verhältnis zu einem den Saturn umkreisenden Mond ein kleines, ganzzahliges Verhältnis annimmt.

Material entzieht. Weiter konnten die Instrumente der Cassini-Sonde Partikel in den Ringen lokalisieren, die auch auf dem Saturnmond Phoebe zu finden sind. Außerdem scheinen die Ringe in Abhängigkeit ihres Durchmessers aus Material unterschiedlicher chemischer Zusammensetzung zu bestehen und zwei bisher unentdeckte Monde wurden aufgespürt. Für die extrem geringe Dicke der Saturnringe sind inelastische Stöße der Partikel verantwortlich, die unabhängig voneinander um den Planeten kreisen. Unter der Annahme, dass die Ringe aus einem auseinander gebrochenen Saturnmond entstanden sind, haben die Partikel aufgrund der Drehimpulserhaltung eine Vorzugsrichtung. Die zu den Saturnringen vertikale Geschwindigkeitskomponente der Partikel und die Ringdicke werden aufgrund inelastischer Stöße und des Wirkens der Gravitation verringert. Dieser Zusammenhang wurde von Brahic (1975) und Goldreich & Tremaine (1975*a*) bzw. Goldreich & Tremaine (1975*b*) numerisch untersucht. Sie bestätigten eine endliche Ringdicke nach einer geringen Anzahl inelastischer Stöße pro Ringpartikel.

Das Ringsystem des Saturn ist unter anderem durch die Dynamik stoßender Partikel charakterisiert. Solche Systeme werden im Bereich der granularen Dynamik untersucht. Trotz aufwändigen Untersuchungen ist das Verhalten granularer Materie, insbesondere das Verhalten eines Vielteilchensystems unter dem Einfluss inelastischer Stöße, noch immer nicht ausreichend verstanden und bedarf weiterer Grundlagenforschung. Laut Duden ist Granulat eine Substanz in Körnchenform. Dabei reicht die Größenskala von  $10^{-6}$  m für Teilchen einer Suspension bis zu Felsbrocken mit einem Durchmesser von mehreren Metern, wie sie auch in den Saturnringen vorkommen. Die wohl häufigste Erscheinungsform von Granulat ist Sand, mit dem wir schon im Kindesalter erste spielerische Erfahrungen gesammelt und dabei wesentliche Eigenschaften aller Granulate kennen gelernt haben: Einerseits kann man ihn durch seine Finger rieseln lassen, andererseits lässt er sich zu stabilen Haufen aufschütten. Dies ist eine Eigenschaft aller Granulate. In statischen Systemen verhält sich ein Granulat wie ein Festkörper, so können wir am Strand spazieren gehen, ohne einzusinken. In dynamischen Systemen zeigt ein Granulat unter anderem Eigenschaften eines Fluids, wie etwa beim Abgang von Lawinen. Diese Ambivalenz bezüglich des Aggregatzustandes führte Jaeger & Nagel (1996) zu der Forderung, die Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig um den Zustand *granular* zu erweitern.

Faraday (1831) und Reynolds (1885) waren die ersten, die die Dynamik granularer Systeme untersuchten. Auf der Oberfläche eines horizontal ausgerichteten, vertikal vibrierenden Blechs beobachtete Faraday (1831) eine den Chladnischen Klangfiguren überlagerte Struktur in der Anordnung des aufliegenden Granulats. Während das Granulat bei der Visualisierung der Klangfiguren lediglich in Bereiche der Platte gerät, in denen die Schwingungsamplitude minimal ist, ist die überlagerte Struktur ein granulares, durch inelastische Stöße geprägtes Phänomen. Reynolds (1885) formulierte das Prinzip der *Dilatanz*, welches besagt, dass eine Packung granularer Materie oberhalb einer bestimmten kritischen Dichte



Abbildung 1.2: Momentaufnahme eines Oszillons. Entnommen aus Umbanhowar et al. (1996).

nur durch eine Volumenvergrößerung zu verformen ist. Im Großteil der Untersuchungen zum Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer äußeren Anregung wird das Granulat vertikalen Oszillationen ausgesetzt. Dabei tritt beispielsweise das Phänomen sogenannter Oszillons auf, welche sich in dem ständigen Auf- und Abbau eines granularen Kegels in einem mehrlagigen Granulat äußern (Abb. 1.2). Eine experimentelle Beschreibung dieses Phänomens erfolgte erstmals von Umbanhowar et al. (1996). Eine theoretische Bestätigung der Oszillonnen entstand durch Cerda et al. (1997).

Der Reiz, sich mit der Dynamik granularer Materie zu befassen, liegt nicht nur in den optisch faszinierenden Ergebnissen dieser Prozesse, wie sie unter anderem in Form der Saturnringe oder der leicht geschwungenen, symmetrisch angeordneten Sandwellen am Strand zu bewundern sind (Abb. 1.3). Auch im Alltag begegnen uns ständig granulare Phänomene, die uns in Erstaunen versetzen. So ist ein vakuumverpacktes Päckchen Kaffee steinhart, bis man der Luft Zugang gewährt. In der Müslitüte liegen die größten Teilchen immer obenauf, und eine Sanduhr zeigt immer eine konstante Durchflussrate, unabhängig von der noch verbleibenden Füllhöhe im oberen Kolben.

Das einem Backstein ähnelnde Kaffee-päckchen lässt sich mit dem von Reynolds (1885) formulierten Prinzip der Dilatanz erklären. In der Vakuumverpackung ist das Kaffeepulver möglichst dicht gepackt und somit nur durch eine Volumenvergrößerung zu verformen. Ohne die Packung zu öffnen, ist dies nicht möglich.





Abbildung 1.3: Rippelstruktur unter dem Einfluss einer Scherströmung. Mit freundlicher Genehmigung von Christof Krülle.

Das gleiche Prinzip erklärt auch die trockene Umrandung eines Fußabdruckes im Brandungsbereich eines Strandes. Das Aufsteigen der größeren Teilchen in der Umgebung von kleineren, wie z. B. in einer Müslitüte, wird als *Paranusseffekt*, das Absinken als *umgekehrter Paranusseffekt* bezeichnet. Der Begriff Paranusseffekt wurde von Rosato et al. (1987) geprägt<sup>2</sup>. Sie waren die ersten Wissenschaftler, die sich mit diesem Segregationseffekt<sup>3</sup> beschäftigten. Das Phänomen selbst ist jedoch schon länger bekannt und wurde von Ingenieuren bereits Jahre zuvor untersucht (z. B. Brown (1939)). Sowohl der Paranusseffekt als auch seine Umkehrung sind noch heute Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen, wie sie beispielsweise von Breu et al. (2003) und Kudrolli (2004) vorgenommen werden (Abb. 1.4). Die verantwortlichen Segregationsmechanismen werden in Kapitel 4.3 dargestellt. Die konstante Durchflussrate einer Sanduhr, die unabhängig von der noch verbleibenden Füllhöhe im oberen Kolben besteht, ist auf das von Behringer (1993) beschriebene Kraftnetzwerk von Teilchen innerhalb einer granularen Packung zurückzuführen. Die Teilchen bilden Brücken, wodurch Kräfte auf die Behälterwände umgeleitet werden. Diese Brückenbildung garantiert einen konstanten Druck unabhängig von der Füllhöhe in dem Behälter und ermöglicht so die Zeitmessung mit einer Sanduhr.

---

<sup>2</sup>Die Namensgebung resultiert aus einer Geschichte aus Brasilien, nach der die größten Nüsse, die Parantüsse, nach einem Nusstransport stets obenauf liegen.

<sup>3</sup>Der Begriff Segregation beschreibt die Entmischung zweier Teilchensorten eines binären Granulats.

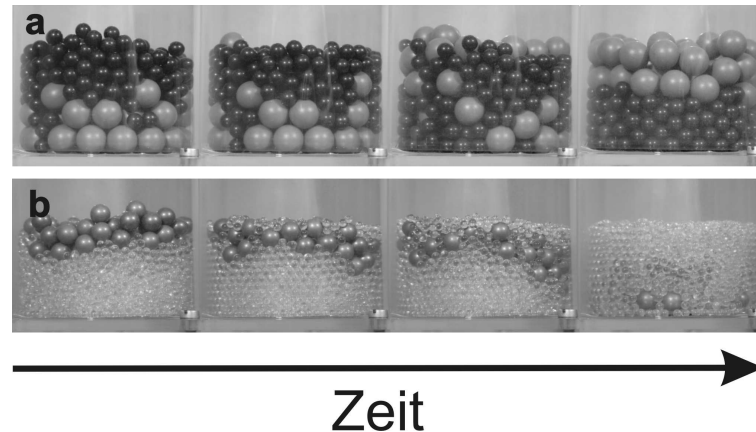


Abbildung 1.4: Zeitliche Entwicklung des (a) Paranusseffektes für Polypropylenkugeln ( $d = 1,5$  cm) und Glaskugeln ( $d = 0,8$  cm) und des (b) umgekehrten Paranusseffektes für Bronzekugeln ( $d = 1,0$  cm) und Glaskugeln ( $d = 0,4$  cm). Entnommen aus Breu et al. (2003).

Auch in der Industrie liegt ein Großteil der zu verarbeitenden Produkte in granularer Form vor. All diese Produkte müssen über Förderbänder oder Rutschen transportiert werden und zeigen dabei dynamische Prozesse, die sich meist in Form von Entmischung unterschiedlicher Teilchensorten äußern. Bei bestimmten Anwendungen mag dieser Effekt erwünscht sein, doch besonders in der Pharmaindustrie ist bei der Zusammensetzung von Arzneimitteln eine möglichst homogene Verteilung der einzelnen chemischen Komponenten von großer Bedeutung.

In dieser Arbeit wird das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontal kreisförmigen Oszillation in einer kreisförmigen Schale untersucht. Als Granulat werden dabei Kugeln benutzt, die in Größe und Material variieren. Kapitel 2 gibt einen Überblick über vorangegangene Untersuchungen zur granularen Dynamik unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation. In Kapitel 3 wird der experimentelle Aufbau zur Untersuchung der granularen Dynamik vorgestellt. Außerdem werden die für die Messungen benötigten Komponenten und die zur Auswertung der Daten verwendeten Messtechniken dargestellt. In Kapitel 4 werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert. Zuerst werden zwei Phasenübergänge in Abhängigkeit der Schwenkamplitude  $A$  und der Füllhöhe  $\mu$  der Kugeln in der Schale vorgestellt. Anschließend werden die Geschwindigkeitsverteilungen der Kugeln in Abhängigkeit der Füllhöhe  $\mu$  präsentiert. Es werden sowohl die Topologie der Verteilungen im Zusammenhang mit den Phasenübergängen als auch die Abweichungen von einer Gauß-Verteilung diskutiert. Weiterhin werden zwei Transporteffekte vorgestellt, die auffällige Ähnlichkeit zu dem Paranusseffekt und dem umgekehrten Paranusseffekt zeigen. Das Auftreten dieser Effekte wird in Abhängigkeit der Teilcheneigenschaften wie Durchmesser

und Dichte sowie der Amplitude  $A$ , der Frequenz  $\nu$  und der Füllichte  $\mu$  untersucht und in Zusammenhang mit den Phasenübergängen dieses Systems gestellt. In Kapitel 5 wird eine numerische Simulation des Systems vorgestellt. Darin wird die Dynamik rollender Kugeln auf ein “modifiziertes” System harter, rotationsfrei rutschender Scheiben übertragen. Zu Beginn wird der Programmablauf erläutert und das verwendete Stoßgesetz hergeleitet. Anhand des Vergleichs von numerischen und experimentellen Ergebnissen wird dann überprüft, ob mit einer solchen Vereinfachung das Verhalten rollender Kugeln zufriedenstellend beschrieben werden kann. Weiterhin werden bei quantitativer Übereinstimmung von Experiment und Simulation die für den beobachteten Effekt relevanten Parameter extrahiert. In Kapitel 6 wird die Arbeit zusammenfassend abgeschlossen und ein Ausblick über weiterführende Untersuchungen gegeben.



# Kapitel 2

## Dynamik eines angeregten Granulats

### 2.1 Horizontal linear angeregtes Granulat

In den letzten Jahren ist das Augenmerk vermehrt auch auf das Verhalten von Granulat unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation gelenkt worden. Da sich diese Arbeit mit dem Verhalten von Granulat unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation beschäftigt, wird in diesem Abschnitt die zeitliche und thematische Entwicklung solcher Untersuchungen dargestellt. Dabei handelt es sich stets um eine horizontal lineare Anregung des Granulats. Die Untersuchungen, die das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontal zirkularen Anregung behandeln, werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

Die meisten bisher durchgeführten Untersuchungen zur granularen Dynamik unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation können in drei Kategorien eingeteilt werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Konvektion, Fluidisierung und Segregation.

Die ersten Untersuchungen zum konvektiven Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation wurden von Evesque (1992) vorgenommen. In einem dreidimensionalen System beobachtet er, wie Teilchen in der Mitte des Behälters aufsteigen, während das Granulat am Rand des Behälters wieder absinkt. Weiterhin beschreibt er die durch horizontale Oszillation hervorgerufene Formgebung der Granulatoberfläche in dem Behälter, nämlich die abnehmende Füllhöhe des Granulats ausgehend vom Zentrum des Behälters zu den Rändern. Eine quantitative Beschreibung dieses Phänomens erfolgt jedoch nicht. Eine numerische Darstellung wird von Liffman et al. (1997) vorgenommen, jedoch erhalten sie vier Konvektionsrollen, von denen jeweils zwei übereinander angeordnet sind. Eine experimentelle Bestätigung dieser Ergebnisse gibt es bis-

lang nicht.

Auch Painter & Behringer (2000) studieren das Auftreten von Konvektion unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation. Sie betrachten das Verhalten von Kugeln, die auf einer Unterlage rollen. Erst durch leichtes Verkippen der Unterlage senkrecht zur Oszillationsrichtung, erhalten sie ein konvektives Verhalten der Kugeln, wenn die Amplitude der Anregung einen kritischen Wert überschreitet. Das Auftreten der Konvektion begründen die Autoren mit dem durch das Verkippen der Unterlage hervorgerufenen Symmetriebruch bezüglich der oszillatorischen Anregung.

Die Fluidisierung eines Granulats ist unter anderem Gegenstand dieser Arbeit (s. Abschn. 4.1). Üblicherweise wird der Übergang von einer festkörperartigen in eine fluidartige Phase durch Erhöhung der dem System zugeführten Energie untersucht. Ristow et al. (1997) untersuchen diesen Übergang in Abhängigkeit von der Frequenz der Anregung. Dazu geben sie mehrere Lagen Glaskugeln in einen 10,0 cm langen und 0,6 cm breiten Behälter. Bei ihren Messungen setzt die Fluidisierung beim Überschreiten einer kritischen Frequenz  $\nu_c$  ein und äußert sich darin, dass sich die Kugeln relativ zueinander bewegen. Demgegenüber finden Clément & Rajchenbach (1991) eine ähnliche Abhängigkeit eines solchen Übergangs von der Amplitude  $A$ . Numerische Untersuchungen zu dieser Thematik werden von Ristow (1997) vorgenommen. Damit kann er die zuvor genannten Ergebnisse qualitativ bestätigen und findet außerdem, dass die Frequenz der Anregung einen Mindestwert annehmen muss, damit der Übergang in Abhängigkeit der Amplitude beobachtet werden kann.

Straßburger & Rehberg (2000) untersuchen die Fluidisierung für eine Monolage<sup>1</sup> von Stahlkugeln. Sie beobachten den Übergang von einer unabhängigen Bewegung der Kugeln zueinander zu einer hexagonalen Anordnung der Kugeln bei Erhöhung der Füllichte. Die Frequenz der Anregung wird auf  $\nu = 4,0$  Hz reguliert. Die Amplitude beträgt  $A = 1,0$  cm. Kontrollparameter ist die Füllichte in dem Behälter. Für geringe Füllichten beobachten die Autoren einen gasartigen Zustand der Kugeln, was sich in der ungeordneten Bewegung der Teilchen äußert. Für hohe Füllichten erhalten sie jedoch eine fluidisierte Phase. Die Kugeln bewegen sich im Kollektiv durch den Behälter und nehmen dabei hexagonale Strukturen an. Eine weitere Erhöhung bewirkt den Übergang in eine festkörperartige Phase, in der sich die Kugeln relativ zueinander nicht mehr bewegen. Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Fluidisierung ausgehend von einer festkörperartigen Phase auch durch eine Reduzierung der dem System zugeführten Energie erreicht werden kann.

Weitere experimentelle Untersuchungen zur Fluidisierung werden von Metcalfe et al. (2002) vorgenommen. Im Experiment geben sie zum einen Glaskugeln,

---

<sup>1</sup>Der Begriff Monolage wird verwendet, wenn die Teilchen ausschließlich horizontal zueinander angeordnet sind.

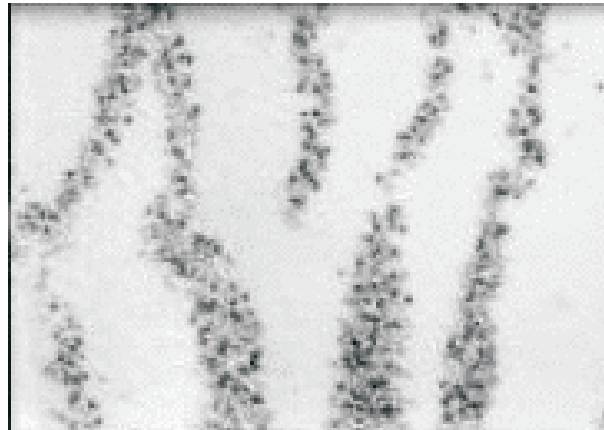


Abbildung 2.1: Streifenbildung von Bronzekugeln in Mohnkörnern senkrecht zur horizontal linearen Oszillation. Entnommen aus Mullin (2000).

zum anderen Sand mit unterschiedlichen Oberflächenbeschaffenheiten in einen rechteckigen Behälter, der horizontal oszilliert. Der Untergrund des Behälters ist porös, um das Granulat von unten mit Luft umströmen zu können. Ohne Luftströmung beobachten sie einen hysteretischen Phasenübergang von einer festkörperartigen in eine fluidartige Phase bei Erhöhung des dimensionslosen Kontrollparameters  $\Gamma = A\omega^2/g$ , wobei  $A$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnen. Die festkörperartige Phase äußert sich durch Bewegungslosigkeit des in dem Behälter aufgeschütteten Granulats. In der fluidartigen Phase bewegen sich die einzelnen Teilchen relativ zueinander und zeigen ein konvektives Verhalten entsprechend den Ergebnissen von Evesque (1992). Die Hysterese verschwindet jedoch, wenn das Granulat von Luft umströmt und dadurch aufgelockert wird. Der Druck der Teilchen aufeinander wird reduziert, und das Prinzip der Dilatanz verliert an Relevanz. Als Ursache der Hysterese sehen die Autoren daher das Prinzip der Dilatanz und die Reibung der Teilchen untereinander.

Segregationseffekte werden von Mullin (2000) beobachtet. In einen 20,0 cm langen und 10,0 cm breiten Behälter wird eine Lage von Mohnkörnern und eine bestimmte Anzahl größerer Kupferkugeln gegeben. Wenn die Oszillation entlang der langen Kante gestartet wird, bilden sich nach einiger Zeit parallele Streifen aus den Kupferkugeln aus, die senkrecht zur Oszillationsrichtung ausgerichtet sind (Abb. 2.1). Unter dem Einfluss der Oszillation zeigen die kleineren Mohnkörner eine ungeordnete Bewegung ohne gemeinsame Vorzugsrichtung. Die größeren Kupferkugeln dagegen bewegen sich langsamer und folgen der horizontalen Oszillation des Behälters. Dabei werden sie ständig von den kleineren Teilchen gestoßen, wodurch sie langsam durch die Schale laufen. Wenn sich zwei Kupferkugeln treffen, trennen sie sich nicht voneinander, sondern sammeln weitere Kupferkugeln

ein. Dadurch entstehen mehrere Kupferkugelcluster<sup>2</sup> an zufälligen Orten in dem Behälter. Nach einiger Zeit verbinden sich die Cluster zu einem Streifenmuster senkrecht zur Oszillationsrichtung. Bei konstanter Amplitude und Frequenz der Anregung tritt dieser Effekt oberhalb einer bestimmten Füllhöhe der kleineren Mohnkörner ein. In weiterführenden Messungen von Reis & Mullin (2003) wird die Entwicklung des Streifenmusters in Abhängigkeit der Füllhöhe der kleineren Mohnkeime genauer untersucht. Es stellt sich heraus, dass das binäre Granulat vermischt bleibt, wenn die Füllhöhe der kleineren Teilchen unterhalb eines kritischen Wertes liegt. Wird dieser Wert überschritten, so bildet sich allmählich das Streifenmuster aus und ist mit wachsender Füllhöhe immer deutlicher ausgeprägt. Die Zeit bis zum Erreichen des Endzustandes der Entmischung beider Teilchensorten wächst mit kleiner werdender Füllhöhe und divergiert bei der für den Effekt kritischen Füllhöhe. Dieses Verhalten wird mit *critical slowing down* bezeichnet. Um den Übergang zu charakterisieren, wird die durchschnittliche Streifenbreite als Ordnungsparameter extrahiert. Mit wachsender Füllhöhe  $\mu$  erhalten die Autoren einen kontinuierlichen Übergang des Parameters von der vermischten in die entmischte Phase.

Sánchez et al. (2004) benutzen eine mit Wasser und Granulat gefüllte Röhre und setzen diese horizontalen Oszillationen aus. Für ein binäres Granulat erhalten sie ebenfalls ein Streifenmuster der größeren Teilchen. Als Auslöser für diesen Effekt machen die Autoren den unterschiedlichen Strömungswiderstand der beiden Teilchensorten verantwortlich. In Hinsicht auf die Ergebnisse von Mullin (2000) vergleichen sie dies mit dem unterschiedlichen Rollreibungsverhalten der beiden Teilchensorten auf dem Untergrund des Behälters.

Weitere Untersuchungen eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation werden im folgenden Abschnitt vorgestellt. Die dort dargestellten Untersuchungen behandeln die Dynamik eines horizontal zirkular angeregten Granulats und entsprechen somit weitestgehend dem von uns benutzten, in Kapitel 3 vorgestellten, Versuchsaufbau.

## 2.2 Horizontal kreisförmig angeregtes Granulat

Dieser Arbeit gehen einige Untersuchungen voraus, die im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden. Gemeinsam ist diesen Untersuchungen, dass sie das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontal kreisförmigen Oszillation behandeln. Horizontal kreisförmige Oszillation bedeutet, dass jeder Punkt des mit Granulat gefüllten Behälters eine kreisförmige Bewegung mit gleichem Radius ausübt. Eine Rotation des Behälters ist nicht gegeben. Das gleiche gilt für

---

<sup>2</sup>Der Begriff Cluster wird verwendet, wenn zwei oder mehrere Kugeln dauerhaft in Kontakt miteinander sind. Die Größe eines Clusters ist durch die Anzahl der Kugeln bestimmt, die das Kontaktkriterium erfüllen.



den in dieser Arbeit verwendeten Versuchsaufbau, der im nachfolgenden Kapitel vorgestellt wird.

Scherer et al. (1996) untersuchen das Verhalten einer Monolage von Kugeln, die in einer Petrischale einer horizontal kreisförmigen Oszillation unterliegen. Bei einem Schalendurchmesser von 9,0 cm können sie maximal 42 Keramik-Kugeln mit einem Durchmesser von  $d = 1,22$  cm in die Schale geben. Die Amplitude der Anregung wird mit  $A = 1,27$  cm angegeben und die Frequenz beträgt  $\nu = 2,5$  Hz. Bei niedrigen Füllichten beobachten sie, dass die Kugeln der Schwenkbewegung der Schale folgen. Bei hohen Füllichten ändert sich jedoch die Drehrichtung der Kugeln, d. h. sie bewegen sich entgegen der Schwenkbewegung der Schale. Inhalt der Arbeit von Scherer et al. (1996) ist es, den Übergang quantitativ zu beschreiben und durch eine numerische Simulation darzustellen. Zwar bemerken sie eine sensitive Abhängigkeit des beschriebenen Effektes von der Oberflächenbeschaffenheit der verwendeten Kugeln, jedoch liegt das Augenmerk auf der Abhängigkeit von der Füllichte  $\mu$  der Kugeln in der Schale. Mit wachsender Füllichte  $\mu$  bemerken sie zunächst eine Abnahme der Umlauffrequenz der Kugeln bzw. des Kugelclusters in der Schale. Bei einer bestimmten Füllichte  $\mu_c$  ist die kreisförmige Bewegung des Kugelclusters in der Schale nicht mehr zu beobachten. Eine weitere Erhöhung der Füllichte bewirkt, dass der Cluster entgegen der Drehbewegung der Schale an deren Rand entlang abrollt. Bei hohen Füllichten verhält sich der Cluster festkörperartig, ähnlich einem Pfannkuchen in einer geschwenkten Bratpfanne. Die relative Positionierung der Kugeln zueinander ist zeitlich nahezu konstant. Bei niedrigen Packungsdichten verhält sich der Cluster eher wie ein Fluid, die Kugeln ändern ständig ihre relative Position zueinander. Ein möglicher Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase wird jedoch nicht weiter untersucht.

Quantitativ kann der Effekt der Richtungsumkehr mit dem Wert des Diffusionskoeffizienten<sup>3</sup> beschrieben werden. Dieser ist positiv und konstant für niedrige Füllichten, wenn sich der Cluster im Drehsinn der Schale bewegt. Sobald jedoch die kritische Füllichte  $\mu_c$  überschritten ist, ist ein linearer Abfall des Koeffizienten zu verzeichnen. Daraufhin vermuten die Autoren einen Zusammenhang mit dem von Reynolds formulierten Prinzip der Dilatanz (Reynolds 1885). Die Ergebnisse der numerischen Simulation zeigen gute Übereinstimmungen.

Weiterführende Untersuchungen von Scherer et al. (1998) in einem vereinfachten Versuchsaufbau sollen den Mechanismus dieses Effektes aufdecken. Dazu betrachten sie das Verhalten von Kugeln in einer kreisförmigen Rinne. Sie untersuchen die Abhängigkeit des Kugelverhaltens von der Füllichte  $\mu$ , der Ringbreite und der Anregungsfrequenz  $\nu$ . Die Amplitude wird auf  $A = 0,95$  cm eingestellt. Der äußere Radius der Ringe beträgt immer 5,0 cm, während die Ringbreite von

---

<sup>3</sup>Der Diffusionskoeffizient ist ein Maß für die Diffusion, die durch Massentransport einen Konzentrationsausgleich zwischen zwei Teilvolumina beschreibt.

1,05 cm bis 1,8 cm variiert. Der Kugeldurchmesser beträgt bei jeder Messung  $d = 1,0$  cm. Wiederum werden die experimentellen Ergebnisse mit denen einer numerischen Simulation verglichen. Zunächst wird die Abhängigkeit des Kugelverhaltens von der Füllichte  $\mu$  der Kugeln in der Rinne untersucht. Bei diesen Messungen wird ebenfalls der zuvor beschriebene Effekt der Richtungsumkehr bei einer kritischen Füllichte  $\mu_c$  beobachtet. Wie sich weiter herausstellt, ist das Auftreten des Effektes unabhängig von der verwendeten Rinnenbreite, jedoch wächst die kritische Anzahl an Kugeln für den Richtungswechsel mit wachsender Rinnenbreite. Die Autoren folgern, dass die kritische Füllichte für den Übergang zwischen beiden Bewegungsrichtungen der Kugeln mit der maximal in der Rinne zu platzierenden Kugelanzahl verknüpft ist. Weiterhin finden sie eine Abhängigkeit des Übergangs von der Anregungsfrequenz  $\nu$ . Zwar kann der Übergang bei konstanter Füllichte  $\mu$  nicht durch Ändern der Frequenz  $\nu$  hervorgerufen werden, jedoch beeinflusst die Frequenz die für den Übergang kritische Füllichte in der Rinne.

Um die Richtungsumkehr der Kugeln weiter zu untersuchen, wird das Verhalten einer einzelnen Kugel betrachtet. Scherer et al. (1998) finden eine oszillatorische Bewegung der Kugel in der Rinne mit der Frequenz der Anregung, überlagert von einer geringen Driftgeschwindigkeit entlang der Bewegungsrichtung der Rinne. Die Vorwärtsbewegung der Kugel dominiert gegenüber der Rückwärtsbewegung. Die numerische Simulation zeigt identische Ergebnisse. Das gleiche gilt auch für eine höhere Anzahl an Kugeln in der Schale. Jede Kugel zeigt eine oszillatorische Bewegung mit einer überlagerten Drift entlang der Bewegungsrichtung der Rinne. Überschreitet die Füllmenge jedoch einen kritischen Wert  $\mu_c$ , so liegt die mittlere freie Weglänge der Kugeln in dem Bereich der Amplitude ihrer oszillatorischen Bewegung. Dies ist gleichbedeutend mit einer hohen Wahrscheinlichkeit für inelastische Stöße der Kugeln untereinander. Darin ist nach Scherer et al. (1998) der Mechanismus für die Richtungsumkehr zu finden. Bei kleinen Füllichten  $\mu$  beeinflussen sich die Kugeln gegenseitig nicht. Jede Kugel hat die Tendenz, entlang der Bewegungsrichtung der Rinne zu driften. Bei höheren Füllichten stoßen die Kugeln inelastisch während dieser Driftbewegung gegeneinander. Dadurch wird Energie dissipiert, was zu einer Reduzierung der Driftgeschwindigkeit führt. Bei Erreichen der kritischen Füllichte  $\mu_c$  ist eine Drift der Kugeln nicht mehr zu beobachten. Jede Kugel oszilliert mit der Frequenz der Anregung. Nach einer weiteren Erhöhung der Füllichte dominiert die Rückwärtsbewegung der Kugeln und sie driften entgegen der Bewegungsrichtung der Rinne.

Aufbauend auf diese Erkenntnisse betrachten Scherer et al. (2000) wieder das Verhalten von Kugeln in einer Petrischale. Sie untersuchen, ob die Clusterbewegung entgegen der Bewegungsrichtung der Schale, also bei hohen Füllichten, durch die Bewegung einer starren Scheibe beschrieben werden kann. Wenn dies der Fall ist, so erwartet man zyklidenartige Trajektorien der einzelnen Kugeln in der Schale, wobei die Trajektorien verschiedener Kugeln unterschiedlichen Ab-

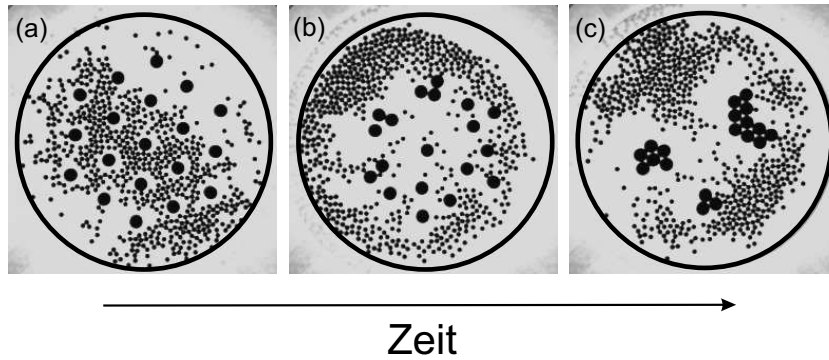


Abbildung 2.2: Segregation von 19 Aluminiumscheiben in 600 Glaskugeln. (a) Ursprüngliche Anordnung, (b) nach 60 s, (c) nach 4920 s. Entnommen aus Aumaître et al. (2001).

stands zum Clusterzentrum ineinander verschachtelt sind. Die Amplitude wird auf  $A = 0,95$  cm eingestellt, und die Frequenz beträgt  $\nu = 1,5$  Hz. Der innere Schalendurchmesser beträgt 5,0 cm. Sowohl im Experiment als auch in der Simulation stellt sich heraus, dass das erwartete Szenario nur für sehr hohe Füllichten  $\mu$  eintritt. Für geringere Füllichten zeigen einzelne Kugeln Abweichungen von einer solchen Bahn, bzw. verändern sie ihre Position relativ zueinander, obwohl sich der Cluster bereits entgegen der Bewegungsrichtung der Schale bewegt. In diesem Fall entspricht der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugeln in der Schale eine homogene Verteilung um den Schalenmittelpunkt. Das gleiche gilt für niedrigere Füllichten  $\mu$ . Für sehr hohe Füllichten dagegen erhalten die Autoren für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit die erwartete Ringstruktur mit einem Ringabstand des verwendeten Kugeldurchmessers bzw. des halben Kugeldurchmessers zum Rand der kreisförmigen Schale.

Aumaître et al. (2001) sind die ersten, die Segregationseffekte in diesem System beobachten. Sie beschreiben die Segregation rutschender Scheiben, die von kleinen Kugeln umgeben sind. Dafür benutzen sie eine kreisförmige Schale mit einem Innendurchmesser von 19,0 cm. Die Amplitude beträgt  $A = 1,0$  cm, und die Frequenz wird von  $\nu = 0,43$  Hz bis  $\nu = 2,0$  Hz variiert. Um den Segregationseffekt zu untersuchen, werden 600 kleine Glaskugeln mit einem Durchmesser von  $d = 0,4$  cm und 19 Aluminiumscheiben mit einem Durchmesser von  $d = 1,0$  cm in die Schale gegeben. Um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, werden die Scheiben vor jeder Messung auf einem hexagonalen Gitter in der Schale platziert. Der Abstand zweier benachbarter Scheiben beträgt dabei 3,0 cm. Wenn die Oszillation gestartet wird, rutschen die Scheiben allmählich ins Innere der Schale. Die Überwindung der Haftreibung erfolgt dabei durch Stöße mit den kleineren Kugeln. Geraten während dieses Prozesses zwei oder mehrere Scheiben in Kontakt, so trennen sie sich nicht mehr voneinander (Abb. 2.2).

Um die Segregationsdynamik zu charakterisieren, wird der mittlere Abstand zweier benachbarter Scheiben bestimmt. Dabei werden nur die Abstände der Scheiben zu ihren nächsten Nachbarn in Betracht gezogen. Zu Beginn einer Messung bestimmt sich dieser Wert aufgrund der anfänglichen Positionierung der Scheiben in der Schale zu 3,0 cm. Bei einer Frequenz von 1,16 Hz wird nach ca. 4000 s ein asymptotischer Wert von 1,0 cm erreicht. Dabei entspricht 1,0 cm dem minimalen Abstand zweier Scheiben mit dem hier verwendeten Durchmesser von  $d = 1,0$  cm. Je höher die Frequenz bei einer Messung eingestellt wird, desto schneller wird dieser Zustand erreicht.

Um den Mechanismus für den Segregationseffekt zu verstehen, werden die 19 Aluminiumscheiben in ihrer anfänglichen Position mit dem Untergrund der Schale verklebt. Unter sonst gleichen Bedingungen wird dann die Oszillation gestartet. Mit Hilfe von Langzeitmessungen wird im Sinne der kinetischen Gastheorie eine Druckverteilung über die Geschwindigkeitsverteilung der kleinen Kugeln in der Schale bestimmt. Es zeigt sich, dass der granulare Druck, hervorgerufen durch die kleinen Kugeln, innerhalb der hexagonalen Scheibenstruktur schwächer ist als zwischen den verklebten Scheiben und dem äußeren Rand der Schale. Es überrascht, dass die kleinen Kugeln diesem Druckgradienten nicht folgen. Die Scheiben scheinen einem Druckausgleich entgegenzuwirken, indem sie auf die kleinen Kugeln eine radial nach außen gerichtete Kraft ausüben. Als Reaktion darauf findet der Clusterprozess der Scheiben in Richtung des Schalenzentrums statt, wenn diese nicht mit dem Untergrund verklebt sind.

Ein anderer Vorschlag zur Erklärung des Segregationseffektes ist das Entropieargument. Wenn die Scheiben anfänglich mit einem gewissen Abstand zueinander in der Schale liegen, so ist jede Scheibe von einem kreisförmigen "verbotenen Bereich" umgeben, in den die Mittelpunkte der kleinen Kugeln nicht eintreten können. Wenn sich der Abstand der Scheiben im Laufe der Zeit verringert, so dass er kleiner ist als der Durchmesser der kleinen Teilchen, überlappen sich diese beiden Bereiche. Folglich wird der verbotene Bereich für die kleinen Kugeln insgesamt umso kleiner, je mehr Scheiben clustern. Die Vergrößerung des für die kleinen Kugeln zur Verfügung stehenden Bereichs bewirkt aufgrund der Zunahme von möglichen Teilchenzuständen wiederum ein Anwachsen der Entropie  $S$ . Das Bestreben des Systems, eine Zunahme der Entropie und damit eine höhere Wahrscheinlichkeit für den Zustand der Kugeln zu bewirken, wird demnach durch den Clusterprozess der größeren Scheiben hervorgerufen. Shinbrot & Muzzio (2001) bezeichnen diesen Prozess als *entropic ordering*.

# Kapitel 3

## Experimenteller Aufbau und Messtechniken

In diesem Kapitel werden der Aufbau des Experiments mit allen für eine Messung benötigten Komponenten und die zur Auswertung verwendeten Messtechniken vorgestellt. Dazu gehört der Schwenkapparat, der die horizontale Kreisbewegung ausübt, das verwendete Granulat, die Kamera mit ihren Komponenten zur Bildgewinnung und Analyse sowie die Stabilitätskontrolle der Luftfeuchtigkeit in dem System.

### 3.1 Der Schwenkaufbau

Um das Verhalten granularer Materie unter dem Einfluss einer horizontalen Kreisbewegung zu studieren, wird ein sogenannter Orbitalshaker Aros 160 der Firma Thermolyne eingesetzt. Dieser wird im Folgenden mit Schwenkapparat bezeichnet. Der Schwenkapparat lässt sich grob in zwei Komponenten unterteilen, in die Basis und den Schwenktisch. Dabei ist unter horizontal kreisförmiger Bewegung eine Überlagerung zweier senkrecht zueinander ausgerichteter Linearbewegungen in der Horizontalen zu verstehen. Der Schwenkapparat kann lineare und zirkuläre Oszillationen variabler Frequenz  $\nu$  und Amplitude  $A$  ausführen. Eine vertikale Bewegung wird nicht ausgeübt. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die zirkuläre Bewegungsform. Diese ist nicht zu verwechseln mit der einer Schallplatte oder CD. Der Schwenktisch rotiert nicht um ein ausgezeichnetes Zentrum, sondern jeder Punkt des Schwenktisches bewegt sich auf einer horizontalen Kreisbahn mit identischem Radius.

Die Basis beinhaltet die Motoreinheit und zugehörige mechanische Komponenten, um die Antriebswelle in Bewegung zu versetzen. Die Basis selbst führt keine Bewegung aus, sondern regt den Schwenktisch zu horizontaler Oszillation

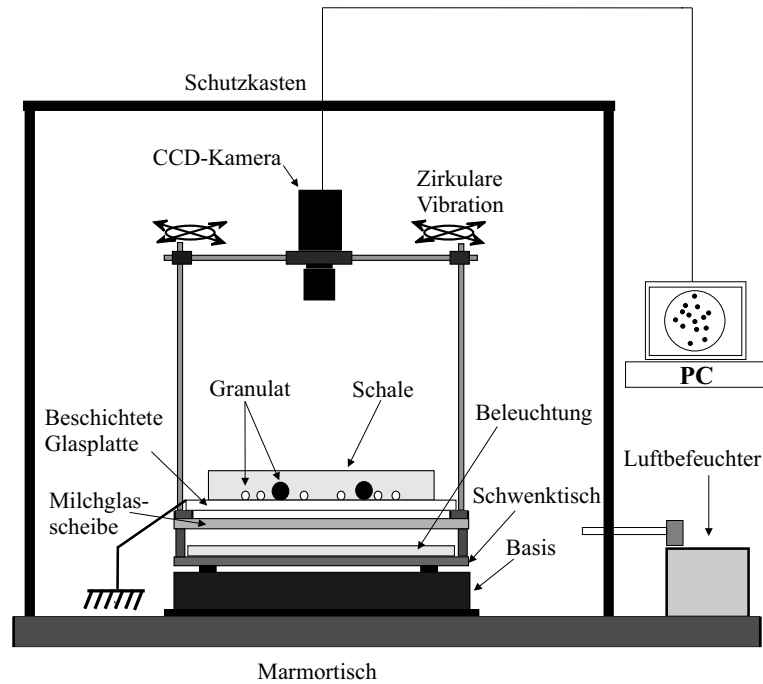


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus.

an. Der Schwenktisch ist somit der Teil des Schwenkapparates, der die Bewegung ausführt. Mit diesem verbunden sind die Beleuchtung, die kreisförmige Schale, in der sich das zu untersuchende Granulat befindet und eine mit Gewindestangen aufgesetzte Kamera, um die granulare Dynamik im mitbewegten System computerunterstützt analysieren zu können. In Abbildung 3.1 ist der Aufbau schematisch dargestellt.

Der Schwenktisch ist in seinem Zentrum über einen Exzenter im Abstand der eingestellten Amplitude  $A$  mit der Antriebswelle des Motors und somit mit der Basis verbunden. Um durch die Kreisbewegung hervorgerufene, störende Vibrationen zu unterdrücken, wird die Basis des Schwenkapparates mit einer 0,12 cm dicken Stahlplatte verschraubt, die ihrerseits mit einem 5 cm starken Marmortisch verschraubt ist. Zur Führung und Stabilisierung des Schwenktisches wird dieser mittels Rollen auf zwei gekreuzt gekoppelten Schienenpaaren gelagert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Motoreinheit, die Antriebswelle, der Exzenter und das Schienensystem in Abbildung 3.1 nicht dargestellt, sondern werden in Abbildung 3.2 gezeigt. Auf der Oberseite des Schwenktisches ist die Beleuchtung angebracht. Sie wird durch eine quadratische Matrix von 189 rot leuchtenden Leuchtdioden (LED) der Firma Kingbright mit einer Lichtstärke von 2000 mcd<sup>1</sup> bis 3000 mcd realisiert. Das von den LEDs ausgestrahlte Licht wird durch

---

<sup>1</sup>MilliCandela

eine darüber befindliche Milchglasscheibe zerstreut, wodurch eine homogene Hintergrundbeleuchtung für das zu betrachtende Granulat realisiert wird. Die LEDs haben gegenüber Leuchtstoffröhren den Vorteil, dass die Helligkeit keine für Messungen störende 50 Hz-Schwankungen zeigt. Die Unterseite der Milchglasscheibe ist mit vier Säulen verklebt, die mit dem Schwenktisch an seinen vier Eckpunkten verschraubt sind. An der Oberseite der Milchglasscheibe sind an den Eckpunkten jeweils 2,0 cm hohe Sockel angebracht, auf denen eine weitere Glasscheibe aufliegt. Durch Unterlegen von dünnen Papierstreifen zwischen dieser Scheibe und den Sockeln kann diese mittels einer Präzisionswasserwaage der Firma Stiefelmayer des Typs QME 08 mit einer Empfindlichkeit von 0,01 cm pro Meter horizontal ausgerichtet werden. Die Fixierung der Glasscheibe auf den Sockeln erfolgt mit Isolierband. Auf der Glasscheibe ist ein kreisförmiger PVC-Ring mit einer Stärke von 0,5 cm und einer Höhe von 2,0 cm angebracht. Der Innenradius des Ringes beträgt 14,5 cm. Durch die Glasscheibe und den darauf liegenden Ring erhält man eine kreisförmige Schale, in der das zu untersuchende Granulat horizontal zirkularen Oszillationen ausgesetzt werden kann. Des Weiteren werden in die vier Sockel vier Gewindestangen eingedreht, die als Halterung der CCD-Kamera<sup>2</sup> dienen. Die Kamera wird zentral in einer Höhe von 36 cm über der Schale fixiert. Auf diese Weise wird sie mit der Schale mitgeschwenkt, und die von der Kamera aufgenommenen Bilder werden im mitbewegten Koordinatensystem der Schale analysiert.

In Abhängigkeit des verwendeten Granulats können elektrostatische Aufladungen das granulare Verhalten beeinflussen. Um die störenden Ladungen abzuführen, wird auf die Oberseite der Glasplatte eine ITO-(Indium-Zinnoxid)-Beschichtung aufgedampft, und die Scheibe wird durch vier an den Eckpunkten angelötete Drähte geerdet.

Im zirkularen Modus weist die Trajektorie des angelieferten Schwenkapparates geringe Abweichungen zu einem Kreis auf, da die Verbindungsachse zwischen dem Exzenter und dem Schwenktisch nicht starr an dem Schwenktisch befestigt ist, sondern einen geringen Bewegungsfreiraum aufweist. Dieses Problem wird durch eine zusätzliche Fixierung der Achse an dem Schwenktisch behoben. Außerdem können durch zusätzliche Bohrungen an einem verlängerten Exzenter und einer Erweiterung des Schienensystems sieben verschiedene Amplituden  $A = \frac{n}{8} \cdot 2,54$  cm mit  $n = 2, \dots, 8$  eingestellt werden. Der gelieferte Schwenkapparat erlaubt nur vier Einstellungen von 0,64 cm bis 1,91 cm. Die modifizierten Komponenten sind in Abbildung 3.2 zu sehen.

Die Frequenz der Oszillation kann durch ein Potentiometer von  $\nu = 0,5$  Hz bis  $\nu = 2,0$  Hz elektrisch variiert werden. Die Messung der Frequenz erfolgt photoelektrisch durch eine gelochte Scheibe, die direkt mit der Antriebswelle verbunden ist. Die Anzahl der Umläufe pro Minute wird digital angezeigt und lt. Hersteller

---

<sup>2</sup>charge-coupled-device

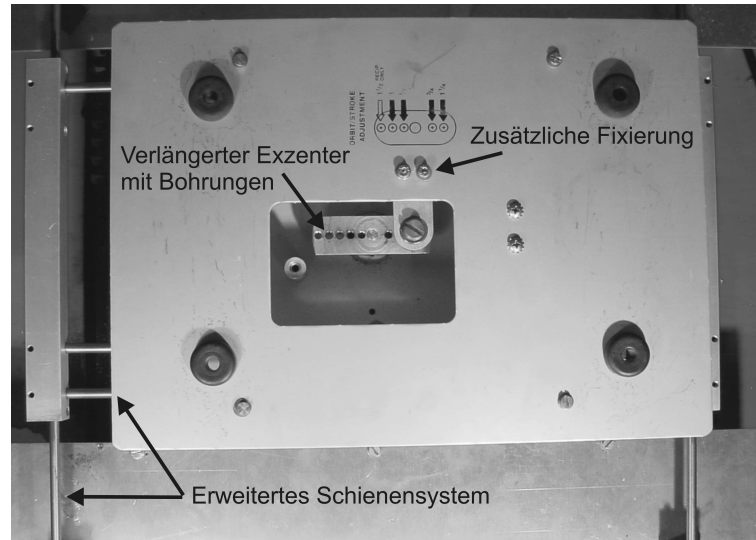


Abbildung 3.2: Änderungen des Schwenkapparates an Exzenter, Verbindung zum Schwenktisch und Schienensystem.

auf  $\pm 5$  Umläufe pro Minute genau bestimmt. Die Frequenzabhängigkeit des Systems wird in dieser Arbeit jedoch nicht gesondert untersucht. Bei nahezu allen experimentell durchgeführten Messungen wird die Frequenz auf  $\nu = 1,67$  Hz eingestellt. Daher wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf die Angabe der Frequenz  $\nu$  verzichtet, sofern sie nicht von  $\nu = 1,67$  Hz abweicht.

Um Messungen unabhängig von der Umgebungshelligkeit durchführen zu können, ist der gesamte Versuchsaufbau durch einen lichtundurchlässigen Schutzkasten von äußeren Einflüssen abgeschirmt. Außerdem ist der Innenraum des Kastens mit Schalldämmmatten verkleidet, um die Lärmbelästigung durch stoßende Kugeln zu reduzieren. Durch zwei aufklappbare Luken kann von außen auf den Versuchsaufbau zugegriffen werden.

## 3.2 Das Granulat

In den verschiedenen Experimenten werden unterschiedliche Granulatsorten benutzt. Die Unterschiede sind durch die Größe und die Dichte des Granulats gegeben. Die Form des Granulats ist jedoch bei jeder Messung identisch. Alle vorgestellten Messungen werden mit Kugeln durchgeführt. Die in dieser Arbeit verwendeten Kugeltypen sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Für die in den Abschnitten 4.1 und 4.2 vorgestellten Versuche mit monodispersen Granulatmischungen werden Glaskugeln des Typs 2 und des Typs 5 benutzt.



Typ	Material	Durchmesser d (cm)	Dichte (g/cm <sup>3</sup> )
1	Glas	$0,3 \pm 0,0002$	2,61
2	Glas	$0,4 \pm 0,0002$	2,59
3	Glas	$0,6 \pm 0,0002$	2,56
4	Glas	$0,8 \pm 0,0002$	2,61
5	Glas	$1,0 \pm 0,0002$	2,48
6	Glas	$1,6 \pm 0,004$	2,45
7	Glas	$2,0 \pm 0,005$	2,55
8	Holz	$0,8 \pm 0,04$	0,64
9	Holz	$1,0 \pm 0,06$	0,64
10	Holz	$1,0 \pm 0,05$	0,67
11	Holz	$1,0 \pm 0,05$	0,78
12	Holz	$1,5 \pm 0,06$	0,76
13	Polypropylen	$1,0 \pm 0,002$	0,85
14	Polypropylen	$1,5 \pm 0,005$	0,85
15	Polypropylen	$2,0 \pm 0,006$	0,85
16	Polyurethan	$1,0 \pm 0,002$	0,84
17	Polyurethan	$1,6 \pm 0,008$	0,84
18	Stahl	$0,4 \pm 0,003$	7,76
19	Stahl	$0,6 \pm 0,002$	7,69
20	Stahl	$1,0 \pm 0,001$	7,69
21	Bronze	$1,0 \pm 0,001$	8,91
22	Aluminium	$0,6 \pm 0,008$	2,65
23	Hartgummi	$2,2 \pm 0,05$	0,88

Tabelle 3.1: Kugeltypen, die in den Experimenten benutzt werden.

Die anderen in Tabelle 3.1 aufgeführten Sorten finden bei den Messungen zur Segregation Verwendung (Abschn. 4.3).

Die Glaskugeln des Typs 1 bis 5 stammen von der Firma Silibeads (Warmensteinach). Die Holzkugeln des Typs 9 wurden in der Drechslerei Miller (Thannhausen/Schwaben) angefertigt. Die Holzkugeln des Typs 8, 10, 11 und 12 wurden in einem gewöhnlichen Baumarkt gekauft. Die Polypropylenkugeln des Typs 13 stammen von der Kugelfertigung Hoch KG (Hassfurt). Die Kugeln des Typs 18 bis 22 wurden von der KGM Kugelfabrik in Fulda bezogen. Die Herkunft der Kugeln des Typs 6, 7, 14, 15, 16, 17 und 23 ist unbekannt, da sie von ehemaligen Mitarbeitern angeschafft wurden. Die Herstellerangaben bezüglich Durchmesser und Masse bzw. Dichte der Kugeln wurden, soweit vorhanden, mit einer Mikrometerschraube und einer Analyseswaage überprüft.

### 3.3 Bilderfassung

Zur Bildgewinnung und Kommunikation mit dem Messrechner werden die CCD-Kamera TM-6703AN von Pulnix und die Bildverarbeitungskarte DT-3162 der Firma Data-Translation verwendet. Um die Schale mit den Kugeln bei einer Kameralhöhe von 36 cm vertikal bildfüllend aufzunehmen, wird ein Objektiv der Firma Cosmocar/Pentax mit einer Brennweite von 4,8 mm benutzt.

Bei der Kamera handelt es sich um eine Progressive-Scan-Kamera, die lt. Hersteller alle Zeilen ihres CCD-Chips sequenziell mit einer Bildwiederholungsfrequenz von 60 Hz ausliest. Eine genaue Überprüfung der Bildwiederholungsfrequenz ergibt jedoch, dass die Zeit, die zwischen der Akquirierung zweier Bilder vergeht,  $t_a = 16,68 \cdot 10^{-3}$  s beträgt. In dieser Zeit wird ein Vollbild in den Arbeitsspeicher des Messrechners geschrieben. Die Bildwiederholungsfrequenz beträgt demnach  $\nu_a = \frac{1}{t_a} = 59,94$  Hz. Für die Bestimmung der Bildwiederholungsfrequenz wird der von Windows zur Verfügung gestellte high-resolution performance counter benutzt. Dieser erlaubt eine zeitliche Auflösung von  $2,79 \cdot 10^{-7}$  s. Der CCD-Chip besteht aus  $648 \cdot 484$  quadratischen Bildpunkten mit  $9 \mu\text{m}$  Kantenlänge. Dadurch kommt es bei statischen Aufnahmen zu keinerlei Raumverzerrungen in horizontaler oder vertikaler Richtung aufgrund des CCD-Chips der Kamera. Die gemessene Lichtintensität der Bildpunkte wird in Grauwerten von 0 bis 255 dargestellt. Die bei allen Messungen eingestellte Belichtungszeit beträgt  $128 \mu\text{s}$ . Bei dieser Belichtungszeit ist eine Bewegungsunschärfe der rollenden Kugeln nicht erkennbar, und die Kugeln werden mit hinreichend hohem Kontrast vor der Hintergrundbeleuchtung abgebildet.

Der verwendete Messrechner ist ein Fujitsu-Siemens-Computer mit Pentium-4-Prozessor, 2-GHz-Taktrate und 1 Gbyte Arbeitsspeicher. Um die durch den Schutzkasten abgeschirmten Messungen visuell erfassen zu können, werden die

akquirierten Bilder mit Unterstützung der Bildverarbeitungskarte in Echtzeit auf dem Bildschirm dargestellt.

Für das Speichern der gewonnenen Bilddaten auf der Festplatte des Messrechners gibt es zwei Varianten, die je nach Bedarf angewendet werden. Für einige Messungen ist es notwendig, dass die Bilder mit der oben genannten Bildwiederholungsfrequenz  $\nu_a$  gespeichert werden. In diesem Fall können die einzelnen Bilder nicht direkt nach ihrer Akquirierung auf der Festplatte gespeichert werden. Aufgrund des hohen zeitlichen Datenaufkommens kann es passieren, dass einige akquirierte Bilder übersprungen und nicht gespeichert werden. Dies würde bedeuten, dass die auf der Festplatte gespeicherten Bilder Lücken aufweisen, die Zeitabstände zwischen zwei gespeicherten Bildern also nicht konstant sind. Daher werden die Bilddaten aller aufeinander folgender Bilder in den Arbeitsspeicher des Messrechners geschrieben, bis dieser ausgelastet ist. Daraufhin wird die Bildakquirierung gestoppt, und die in den Arbeitsspeicher geschriebenen Bilder werden in Form von Bitmap-Dateien auf der Festplatte des Messrechners gespeichert. Bestimmt durch den 1 Gbyte großen Arbeitsspeicher des Messrechners ist die Anzahl der Bilder, die ohne Unterbrechung bei maximaler Bildwiederholungsfrequenz und maximaler Auflösung aufgenommen werden können, auf 1000 begrenzt. In der zweiten Variante wird nur jedes dritte akquirierte Bild auf der Festplatte gespeichert. Dadurch ist das zeitliche Datenaufkommen so gering, dass ein konstanter Zeitabstand zwischen je zwei aufeinander folgenden Bildern gewährleistet ist. Die Anzahl der speicherbaren Bilder ist dann nur noch durch die Größe der Festplatte begrenzt. Im Laufe dieser Arbeit wird bei den einzelnen Messungen darauf hingewiesen, welche Variante benutzt wird. Der gesamte Akquirierungs- und Speicherprozess wird mit einem Visual C++-Programm realisiert, wobei die mitgelieferten Visual C++-Bibliotheken der Bildverarbeitungskarte genutzt werden.

### 3.4 Bildanalyse und Messtechnik

Die Aufnahme der Bilder erfolgt als Draufsicht, senkrecht von oben. Die Umrisse der Kugeln erscheinen im Gegenlichtverfahren als scheibenförmige schwarze Schatten vor hellem Hintergrund (Abb. 3.3). Die Schale wird horizontal bildfüllend und vertikal zentral aufgenommen. Bei einer Auflösung von  $648 \cdot 484$  Bildpunkten befindet sich das Schalenzentrum bei der Koordinate (324, 242). Da der Außendurchmesser der Schale 30,0 cm beträgt, entspricht einem Bildpunkt des CCD-Chips eine Strecke von 0,062 cm, bzw. einem Zentimeter der Schale entsprechen ca. 16 Bildpunkte.

Um die gewonnenen Bilddaten auszuwerten, werden unterschiedliche Methoden angewendet, die sich in zwei Kategorien einteilen lassen. Zum einen werden die Bilder einer zweidimensionalen Fast-Fourier-Transformation (FFT) unterzo-

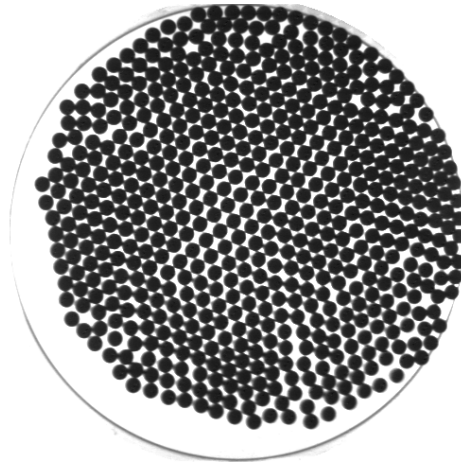


Abbildung 3.3: Momentaufnahme von 580 Glaskugeln ( $d = 1,0$  cm) im Gegenlichtverfahren.

gen, um den Grad der Ordnung in der relativen Positionierung der Kugeln zueinander zu bestimmen. Dazu wird die Funktion “fourier” der Numerical Recipes (Press et al. 1992) in ein C++-Programm eingebettet. Diese Methode sowie ihre Ergebnisse werden in Unterabschnitt 4.1.5 des Kapitels der experimentellen Ergebnisse ausführlich dargestellt. Zum anderen werden Abstands- und Geschwindigkeitskriterien vermessen. Bei diesen Auswertungen, die in dem Unterabschnitt 4.1.4 und den Abschnitten 4.2 und 4.3 beschrieben werden, sind die zur Analyse des Bildes benötigten Daten auf die Schwerpunktskoordinaten der Kugeln beschränkt. Um diese zu bestimmen, wird ebenfalls ein C++-Programm erstellt, das im Folgenden erläutert wird. Wir betrachten den Fall einer monodispersen Kugelmischung. Der Ablauf des Programms kann in vier Schritte unterteilt werden.

Im ersten Schritt wird das zu analysierende Bild geladen und invertiert. Die Bilddaten liegen dann in Form von 256 Graustufen vor. Je dunkler dabei der Grauwert ist, desto höher ist der zwischen 0 und 255 zugeordnete Ganzzahlwert. Um das Bildpunktrauschen der Kamera zu egalisieren und damit die Positionsfindung der Schwerpunktskoordinaten zu optimieren, wird das Bild im zweiten Schritt mit einem Tiefpass geglättet. Anschließend wird im dritten Schritt eine zweidimensionale Kreuzkorrelationstechnik angewendet, um die Schwerpunktskoordinaten der Kugeln auf einen Bildpunkt genau zu bestimmen. Dazu wird synthetisch eine Scheibenschablone in Form einer  $19 \times 19$  Grauwertmatrix generiert. Die Scheibe wird ausgehend von ihrem Zentrum mit kleiner werdenden Werten, beginnend bei Eins, beschrieben, und die Umgebung der Scheibe wird mit Nullen belegt. Die generierte Scheibe hat einen Durchmesser von 16 Bildpunkten, was einer Strecke von ca. 1 cm in der Schale entspricht. Die Koordinaten des

Scheibenprofils werden mit  $(x_s, y_s)$  bezeichnet, die Koordinaten des Bildes mit  $(x_b, y_b)$ . Weiter bezeichnen wir den Grauwert der Scheibenkoordinate  $(x_s, y_s)$  mit  $f(x_s, y_s)$  und den Grauwert der Bildkoordinaten  $(x_b, y_b)$  mit  $g(x_b, y_b)$ . Damit sind die Koeffizienten der Korrelationsfunktion gegeben durch

$$c_{l_1 l_2} = \sum_{y=0}^{16} \sum_{x=0}^{16} f(x_s, y_s) \cdot g(x_b + l_1, y_b + l_2) \quad (3.1)$$

mit  $0 \leq l_1 < 648 - 16$  und  $0 \leq l_2 < 484 - 16$ . Die Ergebnisse der Korrelation werden in eine zweidimensionale  $l_{1,\max} \times l_{2,\max}$ -Matrix geschrieben. Die lokalen Maxima der Korrelationsmatrix liefern die Schwerpunktskoordinaten der Scheiben bzw. der Kugeln auf einen Bildpunkt genau.

Da ein lokales Maximum und die nächsten Nachbarn stets durch eine Parabel beschrieben werden können, wird die Genauigkeit der Schwerpunktskoordinatenbestimmung der Kugeln durch eine Parabelnäherung weiter optimiert. Dabei werden nur solche Maxima betrachtet, die einen bestimmten Schwellwert  $S$  überschreiten und maximal einen dem Schalenradius entsprechenden Abstand vom Zentrum der Korrelationsmatrix haben. Der Suchradius für die lokalen Maxima ausgehend vom Zentrum der Korrelationsmatrix beträgt 232 Bildpunkte, was dem inneren Schalenradius von 14,5 cm entspricht.

Im vierten Schritt wird durch Vorgabe der tatsächlich im System vorhandenen Kugelanzahl überprüft, ob alle Kugelschwerpunkte bestimmt wurden. Die Vorgabe der Kugelanzahl erfolgt automatisiert. Die Namen aller aufgenommenen Bilder beginnen mit der Anzahl der Kugeln, die sich in der Schale befinden. Diese Information wird von dem C++-Programm erfasst. Die Vorgabe der Kugelanzahl ist nicht unbedingt erforderlich. Zur Sicherheit wird die Anzahl der gefundenen Kugelschwerpunkte jedoch stets überprüft, sodass die letzten drei Schritte bei Bedarf wiederholt werden können. Anschließend werden die im dritten Schritt gefundenen Schwerpunktskoordinaten auf ihre gegenseitigen Abstände kontrolliert. Tritt dabei ein Abstand auf, der kleiner ist als der Durchmesser der Kugeln, wurde ein lokales Maximum bestimmt, das nicht im Schwerpunkt einer Kugel liegt. Daraufhin werden die letzten drei Schritte erneut durchgeführt, um die Schwerpunktsbestimmung durch wiederholtes Glätten der Grauwertdaten weiter zu optimieren. Dies wird wiederholt, bis alle Schwerpunktskoordinaten einwandfrei bestimmt sind.

Auf diese Weise können auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Kugeln bestimmt werden. Sei  $v_k$  die Geschwindigkeit der Kugel  $k$ . Diese ist dann gegeben durch den Quotienten aus der zwischen zwei Bildern zurückgelegten Strecke  $s_k$  der Kugel  $k$  und der Zeit  $t_a$ , die zwischen der Aufnahme dieser beiden Bilder vergangen ist:

$$v_k = \frac{s_k}{t_a}. \quad (3.2)$$

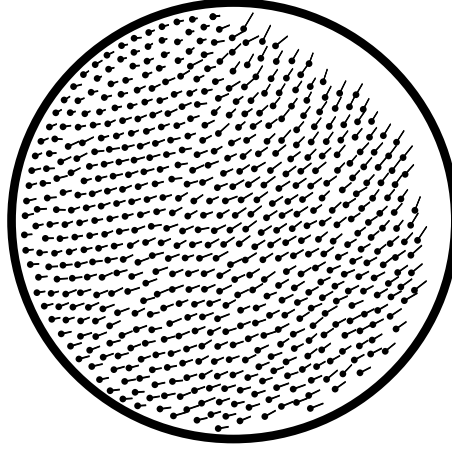


Abbildung 3.4: Geschwindigkeitsfeld von 570 Kugeln ( $\mu = 0,7$ ,  $d = 1,0$  cm). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm. Die Punkte zeigen die Positionen der Kugeln zum Zeitpunkt  $t$ , und die Striche zeigen in Bewegungsrichtung der einzelnen Kugeln. Die Länge der Striche ist ein Maß für die Höhe der Geschwindigkeit.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Schwerpunktskoordinaten aller in der Schale befindlichen Kugeln zum Zeitpunkt  $t + t_a$  den Koordinaten der Kugeln zum Zeitpunkt  $t$  eindeutig zuzuordnen sind. Ein Geschwindigkeitsfeld von 570 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,7$ ,  $d = 1,0$  cm) ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

Die eindeutige Zuordnung der Kugelpositionen zweier aufeinander folgender Bilder ist gewährleistet, wenn die von den Kugeln während der Zeit zwischen zwei Aufnahmen zurückgelegte Strecke  $s$  nicht größer als ihr Radius ist. Bei einem Kugeldurchmesser von  $d = 1,0$  cm und der Akquirierungszeit  $t_a = 16,68 \cdot 10^{-3}$  s bedeutet dies, dass die Geschwindigkeit der Kugeln nicht mehr als 30 cm/s beträgt. In diesem Fall können die Kugelpositionen zweier aufeinander folgender Bilder auch bei hohen Füllichten und Clusterprozessen durch ein Abstandskriterium eindeutig zugeordnet werden. Je zwei Schwerpunktskoordinaten zweier aufeinander folgender Bilder gehören zusammen, wenn ihr Abstand aus der Menge aller Abstände aller Kugeln minimal ist. Bei geringen Füllichten  $\mu$  können die Kugelpositionen auch noch eindeutig zugeordnet werden, wenn Geschwindigkeiten von über 30 cm/s erreicht werden. Das Abstandskriterium ist generell immer dann zuverlässig, wenn für jede Kugel gilt, dass sie sich in der Zeit zwischen zwei Bildern nicht weiter von ihrer vorherigen Position entfernt, als sich eine andere Kugel an diese Position annähert. Dabei beschreibt die Füllichte  $\mu$  das Verhältnis der durch die Kugeln verdeckten Fläche zur gesamten Fläche der Schale und berechnet sich zu

$$\mu = N \frac{r^2}{R^2}, \quad (3.3)$$

wobei  $r$  den Radius der Kugeln,  $R$  den Radius der Schale und  $N$  die Anzahl der

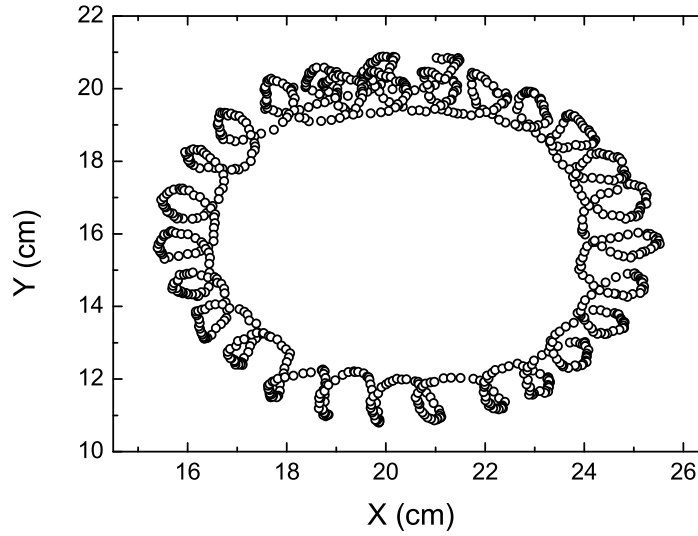


Abbildung 3.5: Verfolgung einer von 665 Kugeln über 16,6 s bei einer Amplitude von  $A = 1,27$  cm.

Kugeln in der Schale beschreibt.

Durch die eindeutige Zuordnung der Kugelpositionen zweier aufeinander folgender Bilder ist es auch möglich, ausgewählte Kugeln aus der Menge aller in der Schale vorhandenen Kugeln über einen längeren Zeitraum zu verfolgen. Abbildung 3.5 zeigt die Bahn einer von 665 Kugeln im mitbewegten Koordinatensystem für einen Zeitraum von 16,6 s. Auszüge aus dem zugehörigen C++-Programmcode zur Schwerpunkts- und Geschwindigkeitsbestimmung aller Kugeln und die Verfolgung ausgewählter Kugeln ist in Anhang B.1 zu finden. Bei Kugeln mit einem Mindestdurchmesser von  $d = 1,0$  cm gelingt die Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten fehlerfrei. Bei kleineren Kugeln erweist sich diese Methode als nicht zuverlässig. Der Grund dafür ist, dass bei hohen Füllichten  $\mu$  bzw. bei Clusterprozessen der Kontrast zwischen den Kugeln und der Hintergrundbeleuchtung zu schwach wird.

Die freie Fläche  $F$  zwischen drei gleich großen Kugeln, wobei jede Kugel Kontakt zu den beiden anderen Kugeln hat (Abb. 3.6), beträgt

$$F = d^2 \frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}. \quad (3.4)$$

Dabei ist  $d$  der Kugeldurchmesser und  $F$  die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge eines Kugeldurchmessers  $d$ , reduziert um drei Kreisabschnitte

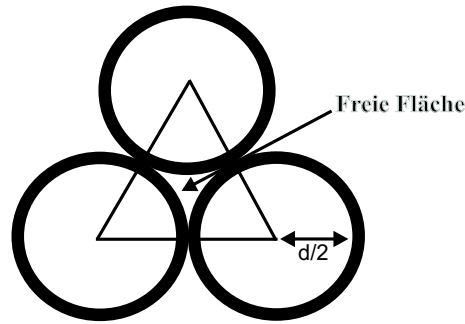


Abbildung 3.6: Freie Fläche zwischen drei gleich großen Kugeln, die alle in Kontakt miteinander sind. Das von dieser Fläche durchgelassene Licht der Hintergrundbeleuchtung wird von dem CCD-Chip der Kamera registriert.

mit einem Öffnungswinkel von je 60 Grad. Die Fläche  $F$  nimmt mit sinkendem Kugeldurchmesser  $d$  quadratisch ab und somit gelangt mit kleineren Kugeldurchmessern immer weniger Licht der Hintergrundbeleuchtung auf den CCD-Chip der Kamera. Außerdem gewinnen Beugungseffekte an Relevanz. Die Umrisse von Kugeln mit einem Durchmesser  $d$  kleiner als 1,0 cm können daher nicht deutlich abgebildet werden. Für den Algorithmus scheinen die Kugeln bzw. die Scheiben ineinander zu verlaufen und eine genaue Positionsbestimmung der einzelnen Kugeln ist nicht verlässlich.

### 3.5 Regelung der Luftfeuchtigkeit

Bei Messungen mit geringer Luftfeuchtigkeit fällt auf, dass sich die Kugeln in Abhängigkeit ihrer Größe und des Materials trotz der ITO-beschichteten Unterlage elektrostatisch aufladen. Dies äußert sich in einer ungeordneten Bewegung der Kugeln zueinander, die weder durch inelastische Stöße der Kugeln noch durch die Anregung der Kugeln durch die oszillierende Schale ausgelöst wird. Außerdem bleiben einige Kugeln trotz der Oszillation am Rand der Schale haften. Durch eine Erhöhung der Luftfeuchtigkeit in dem Schutzkasten kann dieser Effekt aufgehoben werden, da die elektrischen Ladungen durch die Feuchtigkeit besser abgeführt werden können. Bei zu hohen Werten der Luftfeuchtigkeit beginnen die Kugeln jedoch zu klumpen, wenn sie einmal in Kontakt miteinander geraten sind. Um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, wird bei allen Messungen eine Luftfeuchtigkeit von 56 % ( $\pm 1$  %) eingestellt. Bei diesem Wert kann unabhängig von dem verwendeten Kugeltyp keiner der zuvor beschriebenen Effekte beobachtet werden.

Um die Stabilisierung der Luftfeuchtigkeit innerhalb des Kastens zu realisieren, wird der Luftbefeuchter BH-871E der Firma Burg benutzt, der außerhalb des Schutzkastens positioniert ist. Das durch Ultraschall zerstäubte Wasser wird



über einen mit der Nebelaustrittsdüse verbundenen PVC-Schlauch ins Innere geleitet. Bei der Durchführung einer Messung wird der Luftbefeuchter dauerhaft betrieben. Die Luftfeuchtigkeitszufuhr wird über ein 3-Wege-Ventil zwischen Schlauch und Nebelaustrittsdüse reguliert. Dadurch gelangt nur die gewünschte Menge an zerstäubtem Wasser in das Innere des Schutzkastens. Dort wird es durch die Kreisbewegung des Schwenkapparates und einen sich mitbewegenden Fächer gleichmäßig in der Box verteilt, was durch Kontrollmessungen mit einem Hygrometer an unterschiedlichen Stellen innerhalb des Kastens überprüft wurde. Auf diese Weise erhält man ein Gleichgewicht zwischen der Zufuhr und dem Entweichen bzw. Kondensieren der Luftfeuchtigkeit.

## 3.6 Durchführung einer Messung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden der Versuchsaufbau und die zur Datenanalyse verwendeten Messtechniken vorgestellt. Im folgenden Abschnitt wird das zeitliche Zusammenwirken der einzelnen Komponenten zusammenfassend wiederholt und anhand einer Messdurchführung erläutert.

Bevor mit einer Messung begonnen wird, wird das zu untersuchende Granulat stichprobenartig auf altersbedingte Gebrauchsspuren kontrolliert. Je nach Häufigkeit des Einsatzes können aufgrund der zahlreichen Stöße der Kugeln Risse, Abnutzungen oder Absplitterungen an einzelnen Bereichen der Kugeloberfläche auftreten. Da die Rolleigenschaften der Kugeln durch solche Unregelmäßigkeiten in der Oberflächenstruktur beeinflusst werden, werden diese Kugeln aussortiert. Weil nicht jede Kugel einzeln kontrolliert werden kann, werden alle Kugeln in regelmäßigen Zeitabständen erneuert.

Die gewünschte Amplitude  $A$  und Frequenz  $\nu$  wird an dem Schwenkapparat eingestellt. Die horizontale Ausrichtung der Schale wird mit der Präzisionswasserwaage kontrolliert und bei Bedarf durch Unterlegen von Papierstreifen an den vier Ecken der Schale korrigiert. Nachdem das zu untersuchende Granulat in die Schale gegeben wurde, erfolgt durch Schließen des Schutzkastens eine Abschirmung des Versuchsaufbaus vor äußeren Einflüssen. Daraufhin werden der Schwenkapparat und der außerhalb des Kastens stehende Luftbefeuchter eingeschaltet. Anschließend werden einige Minuten abgewartet, bis der Einschwingvorgang der Kugeln unter den eingestellten Bedingungen abgeschlossen ist. Dieser Prozess kann am Bildschirm des Messrechners verfolgt werden und gilt als beendet, wenn die Kugeln visuell über einen Zeitraum von mehr als zwei Minuten die gleiche Verhaltensweise zeigen.

Anschließend kann mit der Aufnahme der Bilder begonnen werden. Mit dem Messrechner in Verbindung mit der CCD-Kamera, der Bildverarbeitungskarte und dem ausgewählten Programm zur Aufnahme der Bilder werden die Bildda-

ten auf der Festplatte des Messrechners als Bitmap-Dateien abgespeichert. Anschließend werden die Bilddaten mit dem entsprechenden Auswertungsprogramm analysiert.

Bei den meisten Messungen wird das Verhalten der Kugeln für verschiedene Parameter wie Amplitude, Kugeldurchmesser, etc. in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  studiert. Nach der Gewinnung der Bilddaten für eine Füllichte können durch die aufklappbaren Luken des Schutzkastens dem System Kugeln hinzugefügt bzw. entnommen werden. Nachdem der Einschwingvorgang wiederum abgeschlossen ist, können erneut Bilddaten gewonnen werden. Bei einigen Messungen ist es wichtig, dass die granulare Dynamik beim Hinzufügen oder Entfernen von Kugeln nicht gestört wird. In diesen Fällen wird darauf geachtet, beim Hinzufügen oder Entnehmen einer Kugel keine weitere Kugel aus der Schale zu berühren und zu beeinflussen.

# Kapitel 4

## Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen an dem zuvor dargestellten System vorgestellt. Zunächst werden die unterschiedlichen Zustände des Systems beschrieben und die entsprechenden Phasenübergänge durch Variation der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  dargestellt und diskutiert (Abschn. 4.1). Anschließend wird die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilungen der Kugeln mit wachsender Füllichte  $\mu$  betrachtet und in Zusammenhang mit den zuvor diskutierten Phasen bzw. Phasenübergängen des Systems gebracht (Abschn. 4.2). Weiterhin werden zwei Transportphänomene vorgestellt, die eine auffällige Ähnlichkeit zu dem Paranusseffekt und dem umgekehrten Paranusseffekt aufweisen. Diese Phänomene werden ebenfalls im Zusammenhang mit den zuvor erwähnten Phasenübergängen diskutiert (Abschn. 4.3).

### 4.1 Phasenübergänge

Im Folgenden werden zwei Phasenübergänge vorgestellt, die für eine Monolage von Kugeln in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  untersucht werden. Es werden dabei drei Phasen unterschieden: die plastische, die fluidartige und die festkörperartige bzw. kristalline Phase.

In der Literatur wird das Verhalten eines Granulats unter bestimmten Bedingungen oft mit einem Gas, einer Flüssigkeit oder einem Festkörper verglichen. Eine Begründung für die Namensgebung in Hinsicht auf Eigenschaften oder das Verhalten eines Granulats ist in Jaeger & Nagel (1996) zu finden. Eine eindeutige Vorschrift zur Zusprennung von gas-, fluid- oder festkörperartigen Eigenschaften zu einer granularen Verhaltensweise gibt es jedoch nicht. Vielmehr variiert die Einteilung in die genannten Phasen leicht in Abhängigkeit des jeweils verwendeten Systems. In dem hier vorgestellten System ist eine gasartige Phase jedoch nicht zu beobachten. Die Bedeutung der Begriffe plastisch, fluidartig und

festkörperartig im Zusammenhang mit dem hier vorgestellten Versuchsaufbau wird in den Unterabschnitten 4.1.1, 4.1.2 und 4.1.3 erläutert. Übergänge zwischen den genannten Phasen werden in Anlehnung an Jaeger & Nagel (1996) als granulare Phasenübergänge bezeichnet.

Der Unterabschnitt 4.1.4 behandelt den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$ . Die Auswertungsmethode der Bilddaten für diesen Übergang basiert auf Positions- und Abstandskriterien der Kugeln. Da die Möglichkeit zur Positionsbestimmung der Kugeln durch den Durchmesser  $d$  der Kugeln begrenzt ist (vgl. Abschn. 3.4), wird in diesem Abschnitt das Verhalten der Glaskugeln des Typs 5 dargestellt (vgl. Tab. 3.1).

In Unterabschnitt 4.1.5 wird die Kristallisation der Kugeln, d. h. der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase, in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  beschrieben. Dieser Übergang wird mit Hilfe einer zweidimensionalen Fourier-Transformation der Bilddaten vermessen. Auf eine Positionsbestimmung der Kugeln kann dabei verzichtet werden, sodass an dieser Stelle die Ergebnisse für die Kugeln des Typs 2 und des Typs 5 vorgestellt und verglichen werden. Die beiden Typen unterscheiden sich einzig in ihrem Durchmesser (vgl. Tab. 3.1). Bei den Kugeln des Typs 5 wird zusätzlich die Füllichte  $\mu$  für die vollständig ausgebildete Kristallisation, d. h. für die Anordnung der Kugeln in der hexagonal dichtesten Kugelpackung, in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  gemessen und mit dem theoretisch zu erwartenden Wert verglichen. Das Resultat ist in Unterabschnitt 4.1.6 dargestellt.

Im Folgenden wird zwischen den Begriffen lokale Packungsdichte und globale Packungsdichte unterschieden. Unter der lokalen Packungsdichte wird das Verhältnis von der durch die Kugeln mit Radius  $r$  verdeckten Fläche zu einer willkürlich festgelegten Fläche  $F_w$  einer bestimmten Größe innerhalb der Schale verstanden, also

$$\mu_{\text{lok}} = N_{\text{lok}} \frac{\pi r^2}{F_w}. \quad (4.1)$$

Dabei ist  $N_{\text{lok}}$  die Anzahl der Kugeln, die sich innerhalb der zu betrachtenden Fläche befinden. Der globalen Packungsdichte entspricht die zuvor definierte Füllichte  $\mu = N \frac{r^2}{R^2}$ , wobei  $R$  dem Schalenradius und  $N$  der Kugelanzahl in der Schale entspricht. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass bei der Darstellung der Ergebnisse auf eine Angabe der Anregungsfrequenz verzichtet wird, sofern diese nicht von  $\nu = 1,67$  Hz abweicht.

### 4.1.1 Die plastische Phase

In der Literatur gibt es keine Hinweise darauf, dass granularem Verhalten plastische Eigenschaften zugeschrieben werden. Wir kennzeichnen die plastische Phase

durch eine geringe Wechselwirkung der Kugeln untereinander bzw. mit dem Rand der Schale und durch eine geringe Relativbewegung der Kugeln zueinander. Alle Kugeln werden durch den sich kreisförmig bewegenden Untergrund angetrieben und auf eine Kreisbahn gezwungen. Dabei ist jede Position in der Schale in einem gewissen Abstand zum Rand gleichberechtigt. Demzufolge bewegen sich die Kugeln in der plastischen Phase auf Kreisbahnen ohne sich gegenseitig zu beeinflussen, da sie sich relativ zueinander nicht bzw. kaum bewegen. Wenn sich aber eine Kugel in die Nähe des Randes begibt und gegen diesen stößt, wird sie ins Innere der Schale reflektiert. Dort dissipiert sie durch inelastische Stöße mit anderen Kugeln einen Teil ihrer Energie und begibt sich wieder auf eine durch den Untergrund der Schale angeregte Kreisbahn. Auf dieser verbleibt sie so lange, bis eine andere Kugel gegen sie stößt.

Man könnte nun die Anordnung der Kugeln in der Schale manipulieren, indem einige der Kugeln während der Oszillation per Hand in der Schale verschoben werden. Auch diese neue Anordnung der Kugeln bleibt mit geringen Abweichungen nach Abwarten des Einschwingvorgangs stabil. Dies erinnert an die durch äußere Einwirkung erzeugbare permanente Verformung eines plastischen Materials. Daher wird dieser Zustand als plastisch bezeichnet. Die einmal vorgegebene Anordnung der Kugeln wird unter dem Einfluss der anregenden Oszillation beibehalten, kann aber jederzeit unter der Einwirkung einer äußeren Kraft in eine andere stabile Anordnung versetzt werden. In Abbildung 4.1 ist eine Bilderserie von 300 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,36$ ,  $d = 1,0$  cm) für einen Zeitraum von 1,59 s aus dieser Phase zu sehen. Der zeitliche Abstand der Bilder resultiert aus der Bildwiederholungsfrequenz der Kamera. Für diese Darstellung wird jedes fünfte akquirierte Bild verwendet.

### 4.1.2 Die fluidartige Phase

Jaeger & Nagel (1996) beschreiben die Lawindynamik eines Granulats als fluidisierten Zustand. Dazu kommt es beispielsweise an der Oberfläche eines Sandhaufens, wenn dieser mit wachsender Höhe einen kritischen Winkel zwischen seiner Flanke und dem Untergrund, den sogenannten Böschungswinkel, überschreitet. Pak & Behringer (1993) vergleichen Wellenbewegungen eines Granulats, die unter dem Einfluss einer Scherströmung oder auch vertikaler Vibration auftreten können mit dem Verhalten von Flüssigkeiten. Straßburger & Rehberg (2000) bezeichnen den Zustand eines Granulats als fluidartig, wenn sich die einzelnen Partikel unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation relativ zueinander bewegen. Oftmals wird fluidartiges Verhalten eines Granulats auch durch einen, im Gegensatz zum festkörperartigen Verhalten, geringen Grad an Ordnung charakterisiert, der sich aus der Positionierung der einzelnen Partikel zueinander ergibt, so zum Beispiel in Olafsen & Urbach (1998) und Losert et al. (1999a).

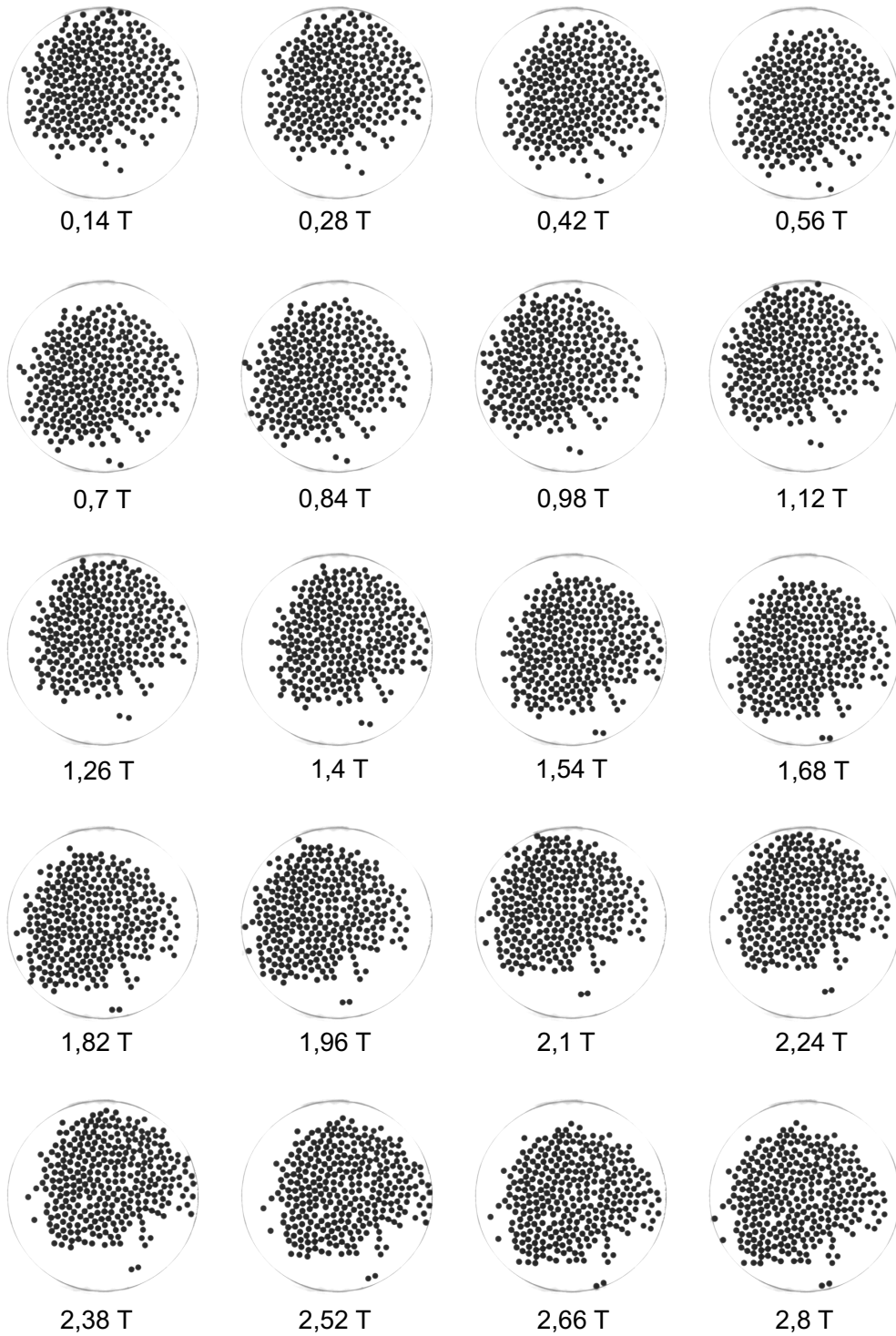


Abbildung 4.1: Bilderserie von 300 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,36$ ,  $d = 1,0$  cm) in der plastischen Phase mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.

Auch wir vergleichen die fluidartige und die festkörperartige Phase eines Granulats anhand einer ungeordneten und einer geordneten, strukturierten Anordnung der Kugeln zueinander. In Unterabschnitt 4.1.5 wird der Übergang von der fluidartigen, ungeordneten Phase in die festkörperartige Phase hoher Ordnung beschrieben.

In der von uns benannten fluidartigen Phase wirken attraktive Kräfte auf die Kugeln. Sie beginnen zu clustern und bewegen sich kollektiv, ähnlich wie ein Flüssigkeitstropfen, durch die Schale. Dabei stößt der Kugelcluster immer wieder gegen den Rand der Schale, wodurch er lokal komprimiert wird, d. h. die lokale Packungsdichte in der Nähe des Randes wird erhöht. Während der Bewegung des Clusters wechselwirken die Kugeln ständig mittels inelastischer Stöße miteinander. Die einzelnen Kugeln befinden sich nicht länger auf einer ungestörten, voneinander unabhängigen Kreisbahn. Vielmehr gibt es eine Überlagerung aus der kollektiven Bewegung der Kugeln in Form eines Clusters, der sich durch die Schale bewegt, mit der Bewegung der einzelnen Kugeln innerhalb des Clusters. Letztere äußert sich in der ständigen Änderung der Teilchenpositionen relativ zueinander, und dementsprechend ist die fluidartige Phase ungeordnet. Die Anordnung der Kugeln zueinander zeigt keine regelmäßige Struktur.

Die Fluidisierung kann so lange aufrecht erhalten bleiben, wie der Anteil der Energie, die den Kugeln durch die äußere Anregung zugeführt wird, die von den Kugeln durch inelastische Stöße dissipierte Energie nicht unterschreitet. In diesem Fall ist das Granulat in ständiger Bewegung. Fluidisiertes Granulat ist somit ein rein dynamisches Phänomen (Jaeger & Nagel 1996). Eine Bilderserie aus dieser Phase von 400 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,48$ ,  $d = 1,0$  cm) ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Der Übergang von der zuvor beschriebenen plastischen Phase in die fluidartige Phase kann durch eine Erhöhung der Kugelanzahl unter sonst gleichen Bedingungen erreicht werden.

### 4.1.3 Die festkörperartige Phase

Olafsen & Urbach (1998) und Losert et al. (1999a) charakterisieren die festkörperartige Phase eines Granulats durch den dauerhaften Kontakt einer Monolage von Kugeln zu einer vertikal oszillierenden Wand, wenn gilt:  $\Gamma = A\omega^2/g < 1$ . Dabei entspricht  $A\omega^2$  der maximalen Beschleunigung der oszillierenden Wand und  $g$  der Erdbeschleunigung. Jaeger & Nagel (1996) schreiben einem Sandhaufen, der unterhalb eines kritischen Böschungswinkels trotz der wirkenden Gravitation keine Lawindynamik und somit keine Bewegung der Partikel relativ zueinander zeigt, festkörperartige Eigenschaften zu. Metcalfe et al. (2002) beschreiben die festkörperartige Phase als einen Zustand, in dem Kugeln unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation clustern und keine Bewegung relativ zueinander ausüben. Ristow (1997) bezeichnet die festkörperartige Phase als einen Zustand, in dem

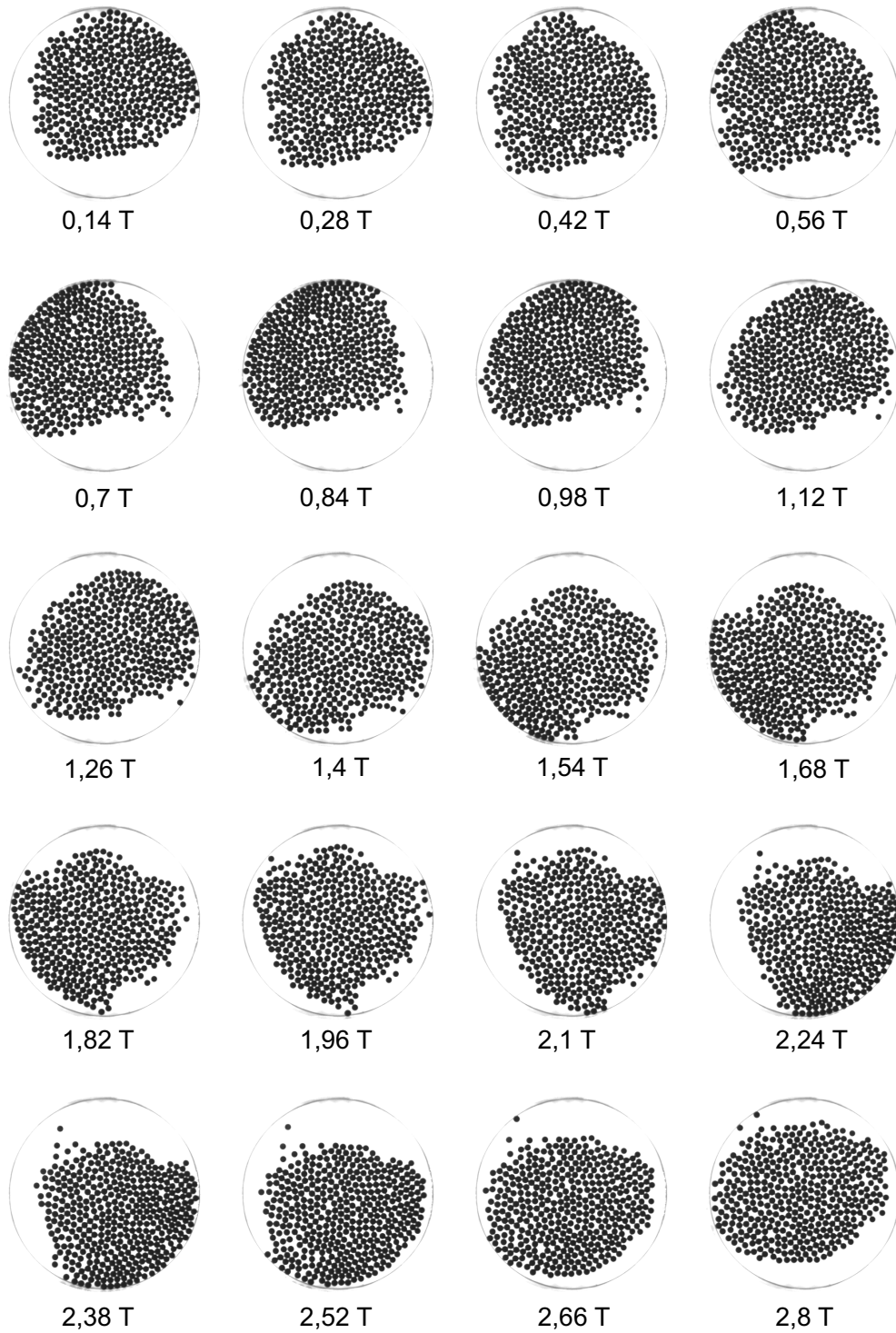


Abbildung 4.2: Bilderserie von 400 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,48$ ,  $d = 1,0$  cm) in der fluidartigen Phase mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.



die untere einer zweilagigen Kugelschicht, die vertikaler Oszillation ausgesetzt ist, dauerhaften Kontakt zu der oszillierenden Wand hat. Weiterhin beobachtet er in dieser Phase weder eine Bewegung der Kugeln relativ zu der oszillierenden Wand noch zueinander, jedoch eine Anordnung der Kugeln in einer hexagonalen Gitterstruktur.

Im Vergleich zu der plastischen und der fluidartigen Phase unseres Systems haben die Kugeln in der von uns als festkörperartig benannten Phase einen geringeren Bewegungsfreiraum. Die Kugeln befinden sich in dauerhaftem Kontakt zueinander, bilden also einen Cluster. Der Cluster wiederum hat dauerhaften Kontakt zu dem Rand der Schale und rollt an diesem entlang ab. Im Gegensatz zu der fluidartigen Phase ändern die Kugeln ihre relative Position zueinander nicht bzw. nur geringfügig. Eine Einzelteilchendynamik ist nicht zu erkennen. Die kollektive Dynamik des Kugelclusters dominiert gegenüber der Dynamik einzelner Kugeln.

Durch den dauerhaften Kontakt des Clusters zu der Wand, werden die Kugeln permanent komprimiert und es bilden sich hexagonale Strukturen aus, wodurch ein höherer Ordnungsgrad als in der fluidartigen Phase erreicht wird. Gestört wird diese Symmetrie nur durch einzelne Punktdefekte und Korngrenzen, die Bereiche unterschiedlicher räumlicher Orientierung der Hexagone trennen. Eine entsprechende Bilderserie von 580 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0$  cm) ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Der Übergang von der in Unterabschnitt 4.1.2 beschriebenen fluidartigen Phase in die festkörperartige Phase kann ebenfalls durch eine Erhöhung der Füllichte  $\mu$  unter sonst gleichen Bedingungen erreicht werden.

#### 4.1.4 Fluidisierung - Der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase

Im Folgenden wird der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase für die Glaskugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) vorgestellt. Abbildung 4.4 zeigt ein typisches Bild der Kugeln in der (a) plastischen und (b) fluidartigen Phase (vgl. dazu Abb. 4.1 und Abb. 4.2). Man erkennt, dass in der fluidartigen Phase (b) mehr Kugeln Kontakt zum Rand der Schale haben als in der plastischen Phase (a). Die Füllichte ist in beiden Bildern gleich und beträgt  $\mu = 0,43$  ( $N = 365$ ). Somit liegt eine Bistabilität zweier Zustände, der plastischen und der fluidartigen Phase, unter sonst gleichen Bedingungen vor. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass entweder der plastische oder der fluidartige Zustand vorliegt. Eine Mischphase aus beiden Zuständen ist nicht zu beobachten. Alle hier vorgestellten Phasen treten stets alleine auf.

Um die beiden unterschiedlichen Zustände zu charakterisieren und den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase quantitativ vermessen zu können,

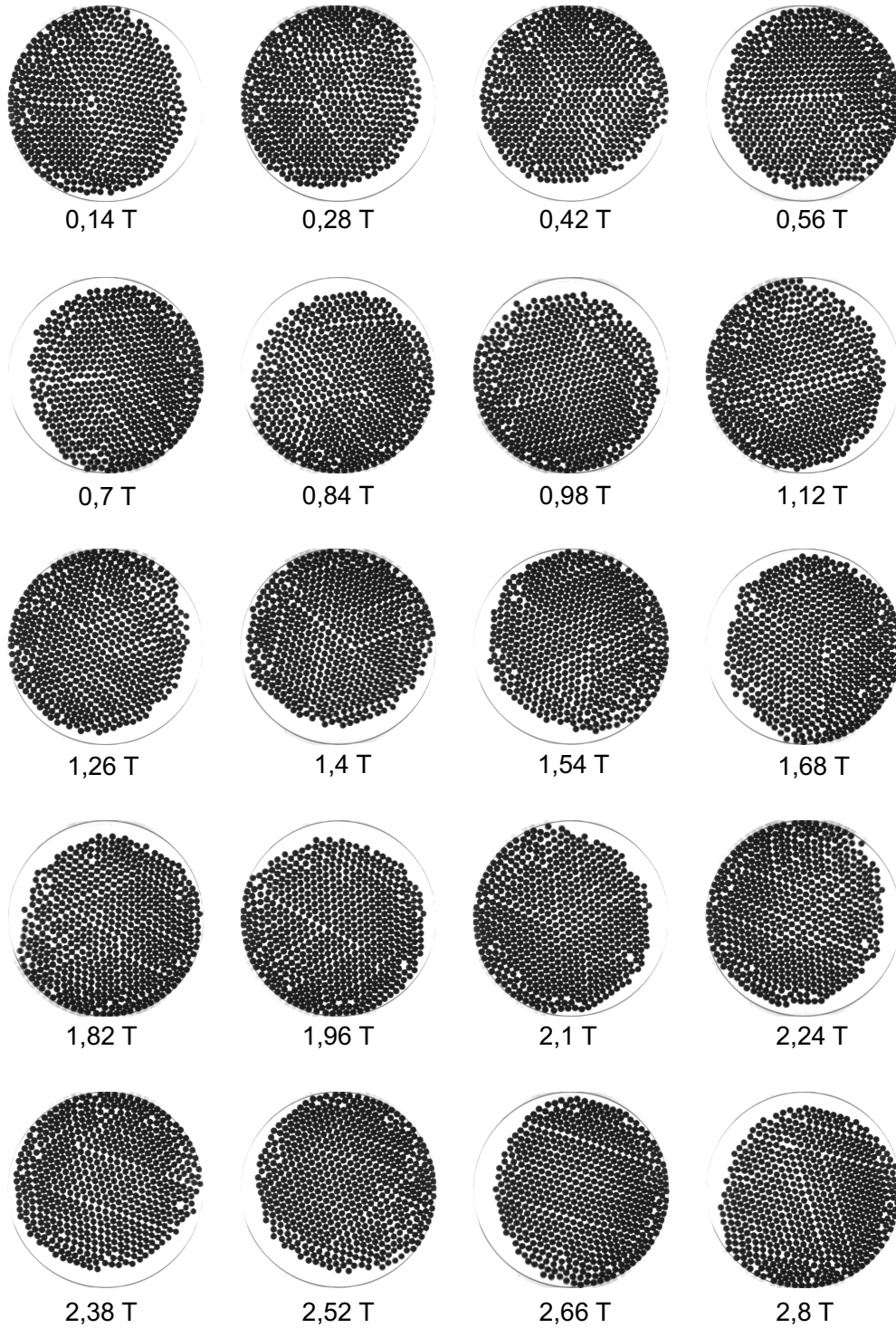


Abbildung 4.3: Bilderserie von 580 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0$  cm) in der festkörperartigen Phase mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.

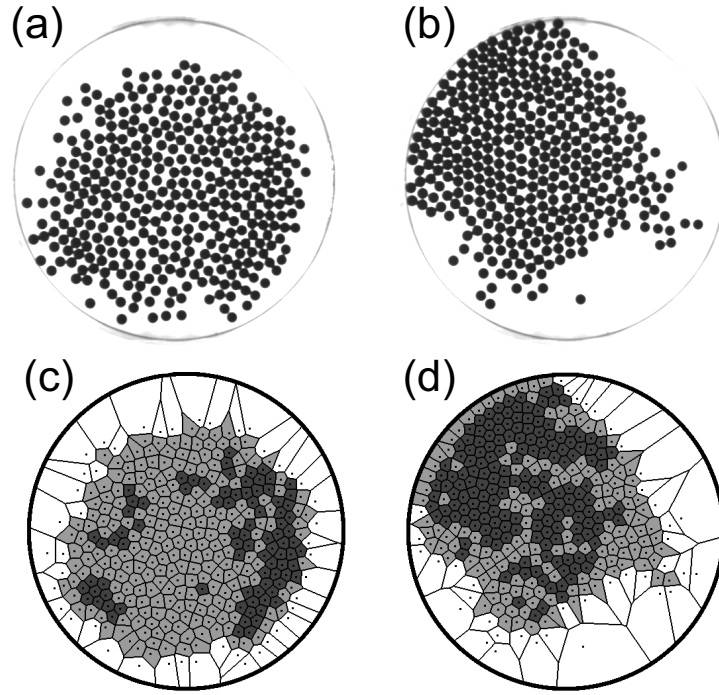


Abbildung 4.4: Kugelbilder des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) aus der plastischen Phase (a) und der fluidartigen Phase (b) mit den entsprechenden Voronoi-Diagrammen für die plastische (c) und die fluidartige Phase (d) bei gleicher Füllichte  $\mu = 0,43$  ( $N = 365$ ). Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm. Die Größe der Voronoi-Zellen ist farblich kodiert. Zellen mit einer Fläche kleiner als  $1,09$  cm<sup>2</sup> sind dunkelgrau dargestellt. Zellen mit einer Flächengröße zwischen  $1,09$  cm<sup>2</sup> und  $2,3$  cm<sup>2</sup> sind hellgrau dargestellt und Zellen mit einer Fläche größer als  $2,3$  cm<sup>2</sup> erscheinen weiß. Die Kugelmittelpunkte und die Grenzen zwischen jeweils zwei benachbarten Zellen sind schwarz markiert.

wird für die Bilder der jeweiligen Phasen ein Voronoi-Diagramm erstellt (Abb. 4.4 (c),(d)). Dazu werden zu allen Bildpunkten einer Aufnahme die Abstände zu den Positionen der Kugelschwerpunkte in der Schale ermittelt. Um einen Bildpunkt einer bestimmten Kugelposition zuordnen zu können, wird der jeweils minimale Abstand zu einer Kugelposition bestimmt. Die Größe einer Voronoi-Zelle richtet sich demzufolge nach der Anzahl der Bildpunkte, die einer Kugelposition zugeordnet werden, die dieser Kugelposition also näher sind als allen anderen. Demnach entsprechen die schwarz dargestellten Grenzen der Voronoi-Zellen den Mittelsenkrechten zweier benachbarter Kugelschwerpunkte.

Da einem quadratischen Bildpunkt mit  $9$   $\mu$ m Kantenlänge ein Quadrat mit  $0,062$  cm Kantenlänge in der Schale entspricht (vgl. Abschn. 3.4), kann den Zellen eine Größe mit der Einheit cm<sup>2</sup> zugeschrieben werden. Die Zellen in Abbildung 4.4

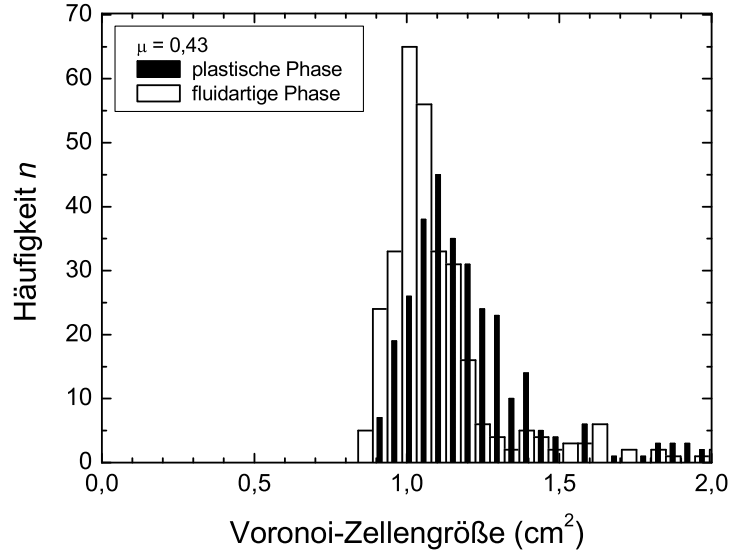


Abbildung 4.5: Histogramm der Voronoi-Zellengröße für die plastische und die fluidartige Phase bei gleicher Füllichte  $\mu = 0,43$  ( $N = 365$ ,  $d = 1,0$  cm). Die Werte für das Histogramm werden aus den Bilddaten von Abbildung 4.4 bestimmt. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.

sind abhängig von ihrer Größe farblich in drei Stufen kodiert. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Anteil der Zellen mit einer Größe kleiner als  $1,09 \text{ cm}^2$  (dunkelgrau) in der fluidartigen Phase (d) höher ist als in der plastischen Phase (c).

Um die Voronoi-Zellengrößen in der plastischen und der fluidartigen Phase miteinander zu vergleichen, ist in Abbildung 4.5 das Histogramm für die Zellengröße beider Phasen dargestellt. Es zeigt sich in der plastischen Phase mit  $1,1 \text{ cm}^2$  ein um 10 % höherer Wert der häufigsten Zellengröße gegenüber  $1,0 \text{ cm}^2$  in der fluidartigen Phase. Der linke äußere Balken der Verteilung für die fluidartige Phase repräsentiert unter anderem die kleinst mögliche Zellengröße der Kugeln, wenn sie sich lokal in einer perfekten hexagonalen Struktur anordnen. Für Kugeln mit einem Durchmesser von  $d = 1,0$  cm berechnet sich diese Zellengröße aus geometrischen Gründen zu  $0,87 \text{ cm}^2$ .

Als Ordnungsparameter  $\alpha$  für den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase verwenden wir die häufigste Zellengröße in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$ . Dabei wird das Verhalten des Ordnungsparameters in Abhängigkeit einer festen Amplitude für zunehmende und für abnehmende Füllichten  $\mu$  betrachtet. In Abbildung 4.6 ist die häufigste Zellengröße gegen die

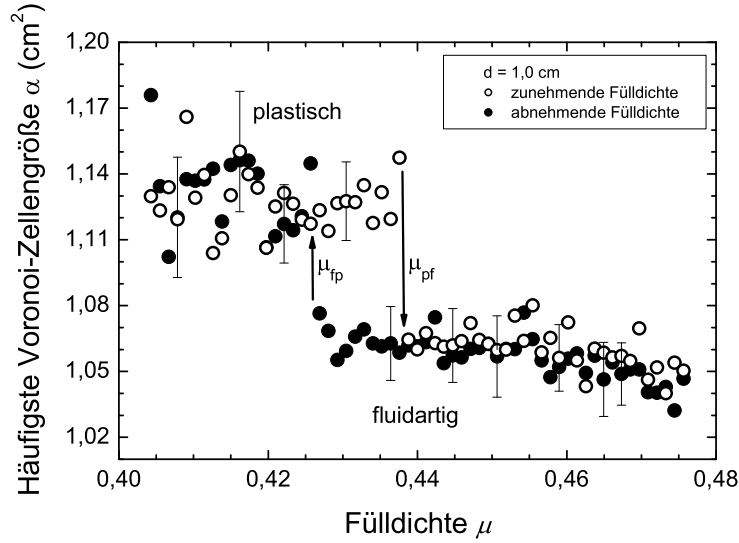


Abbildung 4.6: Hysteretisches Verhalten des Ordnungsparameters  $\alpha$ , d.h. der häufigsten Voronoi-Zellengröße in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für zunehmende Füllichten ( $\circ$ ) und abnehmende Füllichten ( $\bullet$ ). Jeder Punkt repräsentiert die Analyse von 200 Aufnahmen im zeitlichen Abstand von  $16,68 \cdot 10^{-3}$  s. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.

Füllichte  $\mu$  für zunehmende Füllichten ( $\circ$ ) und abnehmende Füllichten ( $\bullet$ ) aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die häufigste Zellengröße in der plastischen Phase im Mittel gegenüber der fluidartigen Phase einen ca. 5 % höheren Wert von  $\alpha = 1,13$  cm<sup>2</sup> annimmt. Für zunehmende Füllichten springt der Ordnungsparameter  $\alpha$  bei  $\mu_{pf} = 0,438$  auf einen niedrigeren Wert und zeigt auch bei weiterer Zunahme der Füllichte einen leichten Trend zu kleineren Werten. Der Sprung des Ordnungsparameters  $\alpha$  an dieser Stelle beschreibt den sprunghaften Übergang des Systems von der plastischen in die fluidartige Phase. Wird umgekehrt die Füllichte ausgehend von der fluidartigen Phase reduziert, so kann dieser Zustand länger aufrecht erhalten werden. Das System springt bei Erreichen der zuvor beschriebenen kritischen Füllichte  $\mu_{pf} = 0,438$  nicht von der fluidartigen in die plastische Phase zurück, sondern verbleibt in der fluidartigen Phase. Bei weiterer Reduzierung der Füllichte wird eine zweite kritische Dichte  $\mu_{fp} = 0,426$  erreicht. Erst dann springt der Ordnungsparameter auf einen ca. 5 % höheren Wert zurück, was gleichbedeutend mit dem Übergang des Systems von der fluidartigen in die plastische Phase ist. Der Phasenübergang von der plastischen in die fluidartige Phase ist demnach hysteretisch. Das Erhöhen bzw. Verringern der Füllichte durch das Hinzugeben oder Entnehmen von Kugeln erfolgt in diesem

Fall, wie in Abschnitt 3.6 des vorangegangenen Kapitels bereits erwähnt, dynamisch. D.h. die Kugeln werden während der Oszillation in der Schale platziert bzw. aus der Schale entnommen, ohne die anderen Kugeln dabei zu berühren.

Die Streuung der Daten ist in der plastischen Phase höher als in der fluidartigen Phase (Abb. 4.6). Dies begründet sich in der voneinander unabhängigen Einzelteilchendynamik in der plastischen Phase. Wir betrachten den Fall zunehmender Füllichten  $\mu$ . Jedes Mal, wenn dem System eine weitere Kugel hinzugegeben wird, wird diese an einer beliebigen Stelle in der oszillierenden Schale positioniert. Nach Abschluss des Einschwingvorgangs ist sie von dieser Position nur geringfügig abgewichen und begibt sich nach eventuellen Stößen mit anderen Kugeln auf eine ortsstabile Kreisbahn. Daher wird bei jedem Hinzugeben weiterer Kugeln die Anordnung der Kugeln untereinander und somit die Größe der Voronoi-Zellen geringfügig beeinflusst. Der Fall abnehmender Füllichten ist analog zu behandeln. Demgegenüber wechselwirken in der fluidartigen Phase die Kugeln ständig mittels inelastischer Stöße miteinander und bilden einen Cluster. Das System ist stabil gegenüber äußeren Einflüssen, und das Verhalten der Kugeln ist unabhängig davon, auf welche Weise eine weitere Kugel in die Schale gegeben wird. Es sei darauf hingewiesen, dass die willkürliche Positionierung weiterer Kugeln in der plastischen Phase die kritische Füllichte  $\mu_{pf}$  für den Übergang in die fluidartige Phase nicht beeinflusst, was durch mehrfache Wiederholung der Messungen bestätigt wird.

Abbildung 4.7 zeigt das entsprechende Phasendiagramm für die kritischen Füllichten  $\mu_{pf}$  und  $\mu_{fp}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ . Der Übergang findet in einem Bereich von  $\mu = 0,38$  bis  $\mu = 0,56$  statt und verschiebt sich mit wachsender Amplitude zu kleineren Füllichten  $\mu$ . Um den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase zu vermessen, werden Amplituden von  $A = 1,27$  cm bis  $A = 2,54$  cm eingestellt. Unterhalb dieses Bereichs kann der Übergang nicht gemessen werden, wohingegen oberhalb dieses Bereichs einzelne Kugeln aus der Schale oder auf die Monolage der Kugeln springen und von dieser getragen werden. Da der Ordnungsparameter  $\alpha$  an den Stellen  $\mu_{pf}$  und  $\mu_{fp}$  jeweils einen Sprung macht und der Übergang hysteretisches Verhalten zeigt (Abb. 4.6), bezeichnen wir diesen Übergang in Anlehnung an die thermodynamische Definition eines Phasenübergangs als einen Phasenübergang erster Art (Landau & Lifschitz 1984).

Es zeigt sich, dass die Breite der Hysterese von der Amplitude  $A$  abhängig ist. In Abbildung 4.8 ist die Breite der Hysterese in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  aufgetragen. Sie wird mit der Anzahl der Kugeln beschrieben, die in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  aus der Differenz der beiden kritischen Füllichten  $\mu_{pf}$  und  $\mu_{fp}$  bestimmt wird. Mit wachsender Amplitude  $A$  ist ein nahezu linearer Anstieg der Hysteresenbreite zu verzeichnen.

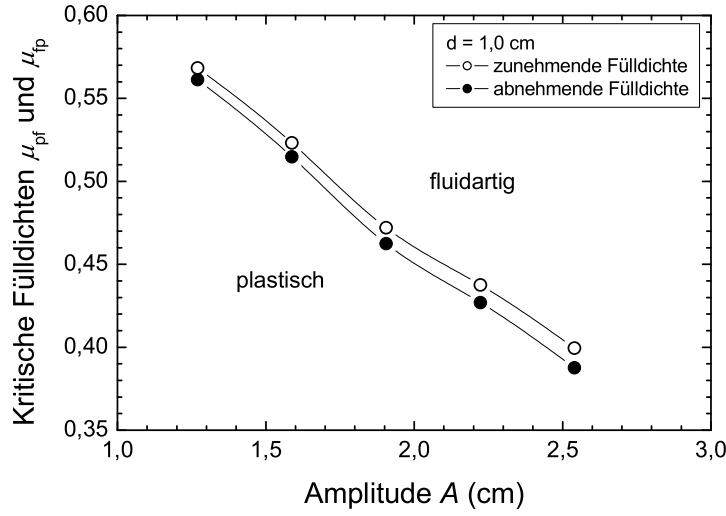


Abbildung 4.7: Phasendiagramm für die kritischen Füllichten  $\mu_{pf}$  und  $\mu_{fp}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ .  $\mu_{pf}$  beschreibt die kritische Füllichte für den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase bei zunehmender Füllichte  $\mu$  ( $\circ$ ).  $\mu_{fp}$  beschreibt die kritische Füllichte für den Übergang von der fluidartigen in die plastische Phase bei abnehmender Füllichte  $\mu$  ( $\bullet$ ).

Ein hysteretischer Übergang granularer Materie wird erstmals von Olafsen & Urbach (1998) vorgestellt. Sie untersuchen das Verhalten einer Monolage identischer Kugeln unter dem Einfluss einer vertikal linearen Oszillation. In Abhängigkeit der dimensionslosen Beschleunigung  $\Gamma = A\omega^2/g$ , wobei  $A$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $g$  die Erdbeschleunigung beschreibt, finden sie einen hysteretischen Übergang von einer gasartigen Phase in eine Phase, in der ein gasartiger Zustand und ein festkörperartiger Zustand koexistieren. Eine explizite Bezeichnung dieses Übergangs als Phasenübergang erfolgt nicht. Eine solche Benennung wird erstmals von Aranson et al. (2000) vorgenommen. Sie untersuchen das Verhalten eines elektrostatisch angetriebenen Granulats zwischen zwei Kondensatorplatten. Sie zeigen, dass die geladenen Partikel in Abhängigkeit des angelegten Wechselfeldes einen hysteretischen Übergang von einer bewegungslosen, festkörperartigen Phase in eine fluidisierte, gasartige Phase durchlaufen. Weiterhin untersuchen Metcalfe et al. (2002) das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontal linearen Oszillation und beobachten hysteretisches Verhalten des Granulats beim Übergang von einer fluidartigen in eine festkörperartige Phase.

Wie in den Unterabschnitten 4.1.1 und 4.1.2 beschrieben, unterscheidet sich

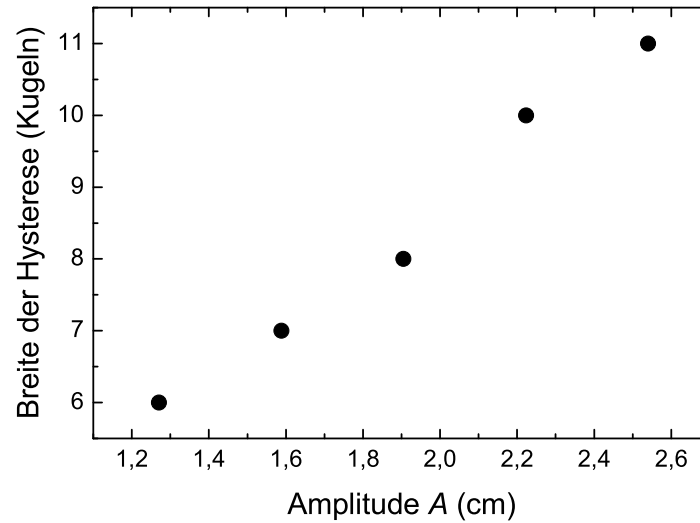


Abbildung 4.8: Breite der Hysterese in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ .

die plastische Phase von der fluidartigen Phase in der Wechselwirkung der Kugeln untereinander und mit dem Rand der Schale. Um Aufschluss darüber zu erhalten, warum die Kugeln bei Erreichen einer kritischen Füllichte  $\mu_{pf}$  dazu neigen, spontan zu clustern, wäre die Verwendung einer hochauflösenden Hochgeschwindigkeitskamera von Nutzen. So könnte beispielsweise die Stoßfrequenz  $\nu_K$  der Kugeln in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  betrachtet werden, was eine interessante Aufgabe für weiterführende Arbeiten darstellt.

#### 4.1.5 Kristallisation - Der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase

Der Übergang von einer ungeordneten Phase in eine geordnete Phase bei Überschreitung einer kritischen Füllichte ist ein häufig zu beobachtendes Phänomen beim Umgang mit granularer Materie. Unter der Annahme, dass die Kugeln gleich groß sind, äußert sich dieser Übergang in einer kristallinen Anordnung der Kugeln. Falcon et al. (1999) beschreiben dieses Phänomen unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation, Straßburger & Rehberg (2000) durch eine horizontal angeregte Translationsbewegung einer Monolage von Kugeln.

Im Folgenden werden die Ergebnisse für den Übergang von der fluidartigen, ungeordneten in die festkörperartige, geordnete oder kristalline Phase für



Glaskugeln des Typs 2 ( $d = 0,4$  cm) und des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) vorgestellt. Um den Grad der Ordnung in der Anordnung der Kugeln zu bestimmen, wird jeweils ein zentraler Ausschnitt der Aufnahmen mit  $256 \cdot 256$  Bildpunkten betrachtet. Dies entspricht einem quadratischen Bildausschnitt mit einer Kantenlänge von 15,87 cm. Diese Bilder werden einer zweidimensionalen Fast-Fourier-Transformation unterzogen. Die Ergebnisse dieses Verfahrens, angewandt auf Kugeltyp 2, sind in Abbildung 4.9 für eine in Abhängigkeit der Amplitude niedrige (a) ( $\mu = 0,46$ ) und eine hohe (c) ( $\mu = 0,76$ ) Füllichte zu sehen. Abbildung 4.10 zeigt das Verfahren für Kugeln des Typs 5 für die Füllichten  $\mu_1 = 0,49$  (a) und  $\mu_2 = 0,69$  (c). Dabei entsprechen die jeweils niedrigeren Füllichten der fluidartigen Phase und die höheren Füllichten der festkörperartigen Phase.

Bei den niedrigen Füllichten, in der fluidartigen Phase, weisen die Kugeln keinerlei Struktur in ihrer Konfiguration auf. Die 2D-Leistungsspektren zeigen eine kontinuierliche Intensitätsverteilung in einem Kreisring mit einem Radius von  $k_d = 2\pi/d$  (Abb. 4.9 (b) u. Abb. 4.10 (b)). Dabei entspricht  $d$  dem verwendeten Kugeldurchmesser und  $k$  der Wellenzahl. Im Gegensatz dazu betrachten wir nun die Ergebnisse für hohe Füllichten, bei denen sich das System in der festkörperartigen Phase befindet (Abb. 4.9 (c) u. Abb. 4.10 (c)). In dieser Phase ordnen sich die Kugeln lokal in der dichtest möglichen Packungsdichte an, was sich in einer Anordnung der Kugeln in einer hexagonalen Struktur äußert.<sup>1</sup> In den zugehörigen 2D-Leistungsspektren erscheinen sechs Intensitätsmaxima, die jeweils durch einen Winkel von  $\frac{\pi}{3}$  räumlich voneinander getrennt sind (Abb. 4.9 (d) u. Abb. 4.10 (d)). Die Maxima liegen jeweils auf einem Kreisring mit einem Radius der Wellenzahl  $k_0 = 2\pi/\frac{\sqrt{3}}{2}d$ . Dabei entspricht  $\frac{\sqrt{3}}{2}d$  dem Netzebenenabstand einer hexagonalen Kristallgitterstruktur mit Abstand  $d$  zwischen zwei Knotenpunkten. Die Dynamik der Kugeln in diesen beiden Zuständen unterscheidet sich gemäß der zuvor beschriebenen Verhaltensweisen eines fluidartigen bzw. festkörperartigen Granulats.

Um den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zu spezifizieren, wird ein Ordnungsparameter  $\beta$  aus den Leistungsspektren extrahiert. Durch Integration entlang des Kreisringes mit  $0,98 k_0 < k < 1,02 k_0$  um die zu erwartenden Maxima und Division durch den arithmetischen Mittelwert wird die normierte spektrale Intensität  $I_n$  in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  bestimmt. In dem fluidisierten, ungeordneten Zustand bei niedrigen Füllichten zeigt diese Funktion einen verrauschten Verlauf, und die Werte schwanken um 1 (Abb. 4.11 und Abb. 4.12). Bei keiner der beiden Kugeltypen ist eine periodische Struktur zu erkennen. Demgegenüber zeigt die Intensität in der geordneten Phase, also bei hohen Füllichten, jeweils sechs Maxima in äquidistanten Abständen.

---

<sup>1</sup>Ein Zusammenhang zwischen der dichtest möglichen Packungsdichte und einer hexagonalen Anordnung von Kugeln wurde erstmals von Kepler (1611) vermutet.

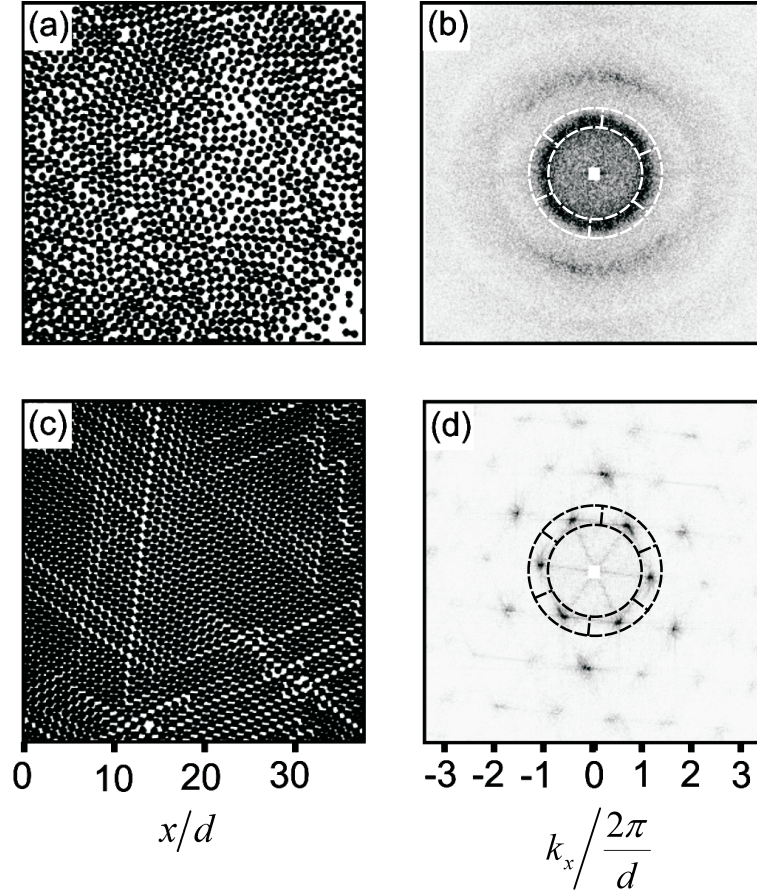


Abbildung 4.9: (a) Quadratischer Ausschnitt einer Aufnahme von 2400 Kugeln des Typs 2 ( $\mu = 0,46$ ,  $d = 0,4$  cm) mit einer Kantenlänge von 15,87 cm. Die Amplitude beträgt  $A = 1,91$  cm. (b) Zugehöriges 2D-Leistungsspektrum (hohe Intensitäten erscheinen schwarz). (c) Ausschnitt einer Aufnahme von 4000 Kugeln des Typs 2 ( $\mu = 0,76$ ,  $d = 0,4$  cm) unter den gleichen Bedingungen und (d) das zugehörige 2D-Leistungsspektrum. Der Bereich des 2D-Leistungsspektrums zur Intensitätsbestimmung ist schematisch eingezeichnet.

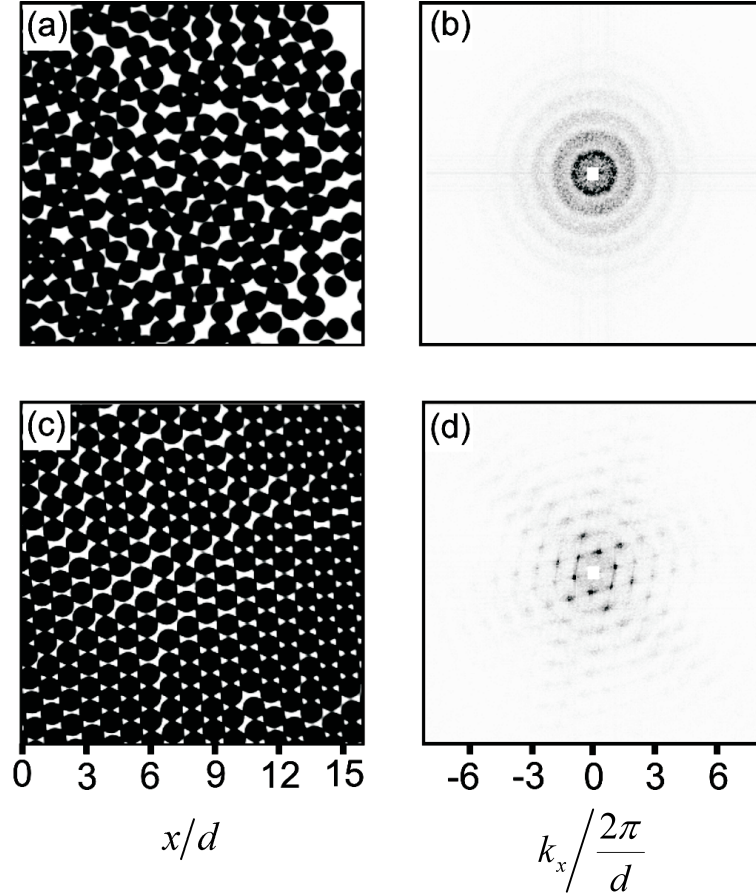


Abbildung 4.10: (a) Quadratischer Ausschnitt einer Aufnahme von 410 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,49$ ,  $d = 1,0$  cm) mit einer Kantenlänge von 15,87 cm. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm. (b) Zugehöriges 2D-Leistungsspektrum (hohe Intensitäten erscheinen schwarz). (c) Ausschnitt einer Aufnahme von 580 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0$  cm) unter den gleichen Bedingungen und (d) das zugehörige 2D-Leistungsspektrum.

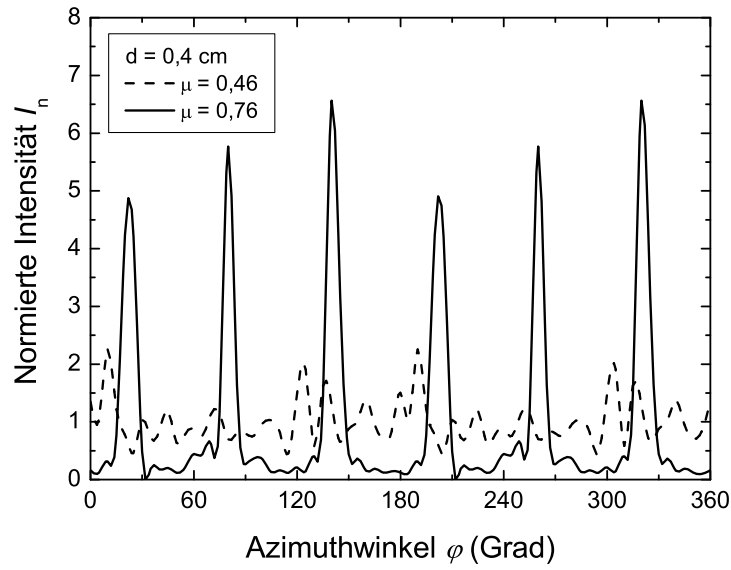


Abbildung 4.11: Normierte Intensität  $I_n$  des Leistungsspektrums im Kreisring für 2400 Kugeln des Typs 2 ( $\mu = 0,46$ ,  $d = 0,4$  cm, - -) und 4000 Kugeln ( $\mu = 0,76$ ,  $d = 0,4$  cm, —). Die Amplitude beträgt  $A = 1,91$  cm.

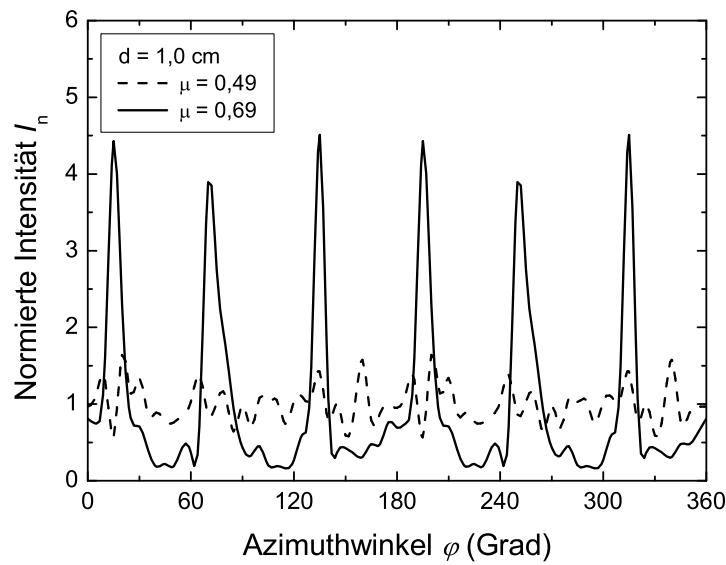


Abbildung 4.12: Normierte Intensität  $I_n$  des Leistungsspektrums im Kreisring für 410 Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,45$ ,  $d = 1,0$  cm, - -) und 580 Kugeln ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0$  cm, —). Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm.

Um nun dem Ordnungsparameter  $\beta$  einen Wert zuordnen zu können, welcher den Grad der Ordnung in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  beschreibt, wird der Winkelbereich  $[0, 2\pi]$  azimuthal in sechs Intervalle gleicher Größe unterteilt. Nach der Aufsummierung dieser sechs verkürzten Intervalle für gleiche Winkel erhält man eine Funktion der Intensität  $I(\varphi)$  in Abhängigkeit des Winkels in dem reduzierten Winkelbereich  $\varphi \in [0, \pi/3]$ . Die Division der Intensität  $I(\varphi)$  durch ihr arithmetisches Mittel liefert die normierte Intensität

$$I_n(\varphi) = \frac{I(\varphi_i)}{\frac{1}{i_{\max}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} I(\varphi_i)}, \quad \varphi_i = i \cdot \frac{\pi}{3i_{\max}}, \quad i_{\max} = 12, \quad (4.2)$$

woraus der Ordnungsparameter

$$\beta \equiv I_{n,\max} - 1 \quad (4.3)$$

gewonnen wird. Die Abbildungen 4.13 und 4.14 zeigen, dass bei niedrigen Füllichten ( $\circ$ ), d. h. in der unstrukturierten Phase, die normierte Intensität  $I_n$  geringfügig um den Wert 1 schwankt. Demgegenüber entsteht bei hohen Füllichten ( $\bullet$ ) ein deutliches Maximum (Abb. 4.11 und Abb. 4.12). Die Höhe des Maximums ist ein Maß für den Grad an Ordnung in der Konfiguration der Kugeln. Ein maximaler Wert ist erreicht, wenn sich die Kugeln in einer perfekten hexagonalen Struktur anordnen.

Die Werte des Ordnungsparameters  $\beta$ , aufgetragen gegen die Füllichte für Kugeln des Typs 2, sind in Abbildung 4.15 zu sehen. Abbildung 4.16 zeigt den entsprechenden Verlauf für Kugeln des Typs 5. Die Bestimmung der kritischen Füllichten  $\mu_{c1}$  und  $\mu_{c2}$  sowie der weiteren in den Bildunterschriften gezeigten Werte wird in Anhang A erläutert. Die Diagramme zeigen die Entwicklung des Ordnungsparameters  $\beta$  für Füllichten von  $\mu = 0,39$  bis  $\mu = 0,76$  für den Kugeltyp 2 und  $\mu = 0,48$  bis  $\mu = 0,69$  für den Kugeltyp 5. Bevor eine kritische Füllichte  $\mu_{c1}$  erreicht wird, schwanken die Daten um einen Mittelwert von 0,66 für Kugeln des Typs 2 und 0,69 für Kugeln des Typs 5. Sobald ein kritischer Wert  $\mu_{c1}$  der Füllichte überschritten wird, ist ein Übergang zu verzeichnen. Die Steigung der Kurve nimmt dann einen von Null verschiedenen positiven Wert an. Dies ist gleichbedeutend mit dem Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase. Bei Erreichen der kritischen Füllichte beginnen die Kugeln, sich zu ordnen. Lokal werden hexagonale Strukturen ausgebildet, die sich mit wachsender Füllichte auf den gesamten Kugelcluster ausweiten. Der kontinuierliche Übergang des Ordnungsparameters  $\beta$  (Abb. 4.15 und Abb. 4.16) und der Symmetriebruch von einer hexagonal strukturierten, festkörperartigen Phase in eine amorphe Phase, der fluidartigen Phase, weisen nach Landau & Lifschitz (1984) auf einen Phasenübergang zweiter Art hin. Der kritische Wert  $\mu_{c2}$ , der für die Kugeln des Typs 5 zusätzlich vermessen wird, beschreibt die kritische Füllichte der vollständig ausgebildeten Kristallisation und wird in Unterabschnitt 4.1.6 erläutert.

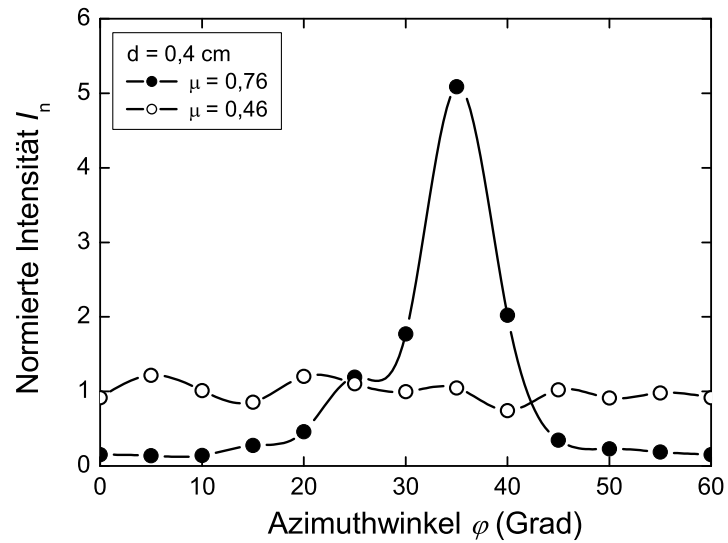


Abbildung 4.13: Normierte Intensität  $I_n$  des Leistungsspektrums für 2400 Kugeln des Typs 2 ( $\mu = 0,46$ ,  $d = 0,4 \text{ cm}$ ,  $\circ$ ) und 4000 Kugeln ( $\mu = 0,76$ ,  $d = 0,4 \text{ cm}$ ,  $\bullet$ ) im reduzierten Winkelbereich. Die Amplitude beträgt  $A = 1,91 \text{ cm}$ .

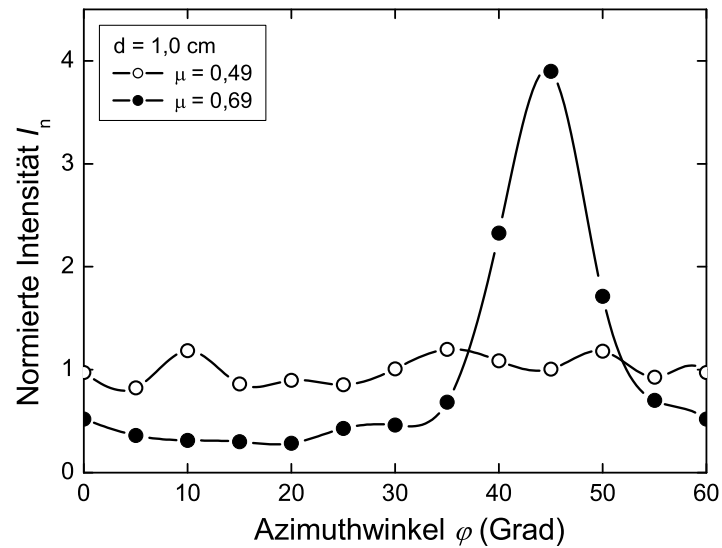


Abbildung 4.14: Normierte Intensität  $I_n$  des Leistungsspektrums für 410 Kugeln ( $\mu = 0,49$ ,  $d = 1,0 \text{ cm}$ ,  $\circ$ ) und 580 Kugeln ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0 \text{ cm}$ ,  $\bullet$ ) im reduzierten Winkelbereich. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22 \text{ cm}$ .

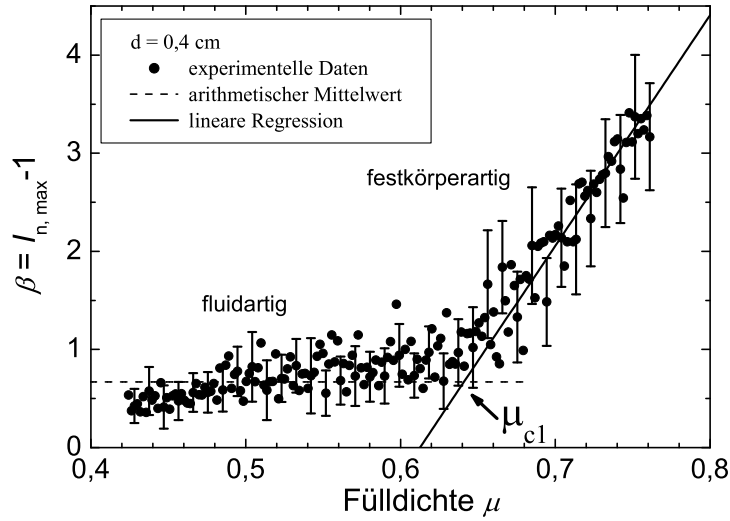


Abbildung 4.15: Abhängigkeit des Ordnungsparameters  $\beta$  von der Füllichte  $\mu$  für Kugeln des Typs 2 ( $d = 0,4$  cm). Jeder Punkt repräsentiert die Analyse von 200 Aufnahmen mit einer zeitlichen Verzögerung von 16,7 ms. Die Amplitude beträgt  $A = 1,91$  cm. Die kritische Füllichte  $\mu_{c1} = 0,64 \pm 0,01$  berechnet sich aus dem Schnittpunkt einer linearen Regression der Daten mit  $\beta > 1,34$  und dem Mittelwert der Daten mit  $\mu < 0,618$ .

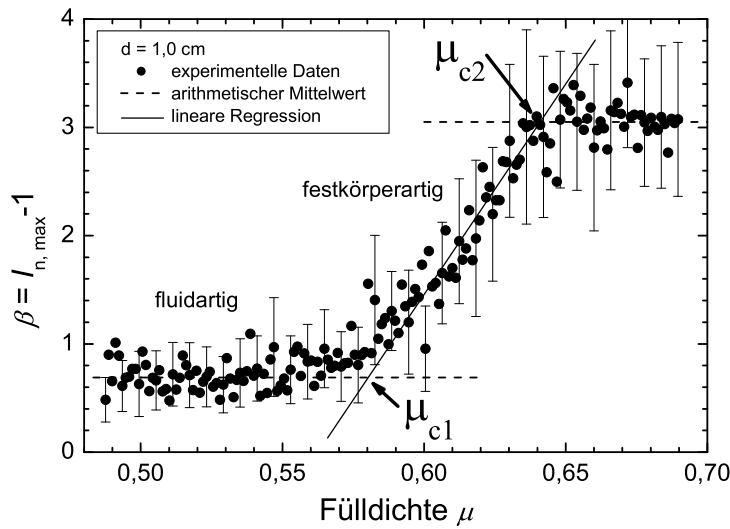


Abbildung 4.16: Abhängigkeit des Ordnungsparameters  $\beta$  von der Füllichte  $\mu$  für Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm). Jeder Punkt repräsentiert die Analyse von 200 Aufnahmen mit einer zeitlichen Verzögerung von 16,7 ms. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm. Die kritische Füllichte  $\mu_{c1} = 0,58 \pm 0,01$  berechnet sich aus dem Schnittpunkt einer linearen Regression der Daten mit  $\beta > 1,42$  und dem Mittelwert der Daten mit  $\mu < 0,553$ . Die kritische Füllichte  $\mu_{c2} = 0,64 \pm 0,01$  berechnet sich aus dem Schnittpunkt der linearen Regression und der Konstanten mit dem Wert  $\beta = 3,05$ .

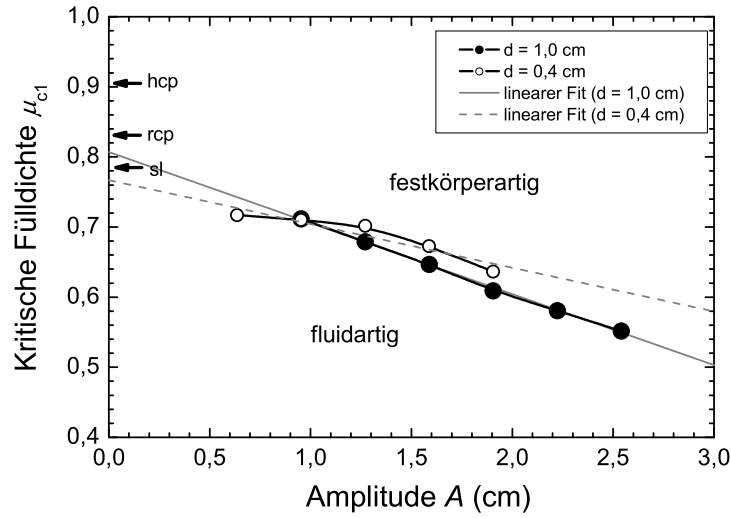


Abbildung 4.17: Phasendiagramm für die kritische Füllichte  $\mu_{c1}$  in Abhängigkeit der Amplitude.  $\mu_{c1}$  beschreibt die kritische Füllichte für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase. Die Werte für den Übergang werden aus der normierten Intensität des Fourierspektrums bestimmt. Die Pfeile deuten auf die Füllichten der hexagonal dichtesten Kugelpackung (engl.: hexagonal close-packed, Abkürzung: hcp,  $\mu_{hcp} = \pi/2\sqrt{3}$ ), der numerisch bestimmten Zufalls-Packungsdichte (engl.: random close-packed, Abkürzung: rcp,  $\mu_{rcp} = 0,83$ ) und der regelmäßigen Anordnung der Kugeln auf einem quadratischen Gitter (engl.: square lattice, Abkürzung: sl,  $\mu_{sl} = \frac{\pi}{4}$ ).

Abbildung 4.17 zeigt das resultierende Phasendiagramm für die kritische Füllichte  $\mu_{c1}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  für beide verwendeten Kugeltypen. Der Übergang findet in einem Bereich von  $\mu = 0,64$  bis  $\mu = 0,72$  für die Kugeln des Typs 2 und in einem Bereich von  $\mu = 0,55$  bis  $\mu = 0,75$  für die Kugeln des Typs 5 statt und verschiebt sich mit wachsender Amplitude zu kleineren Füllichten. Dabei ist zu beachten, dass für die Kugeln des Typs 2 Amplituden von  $A = 0,64$  cm bis  $A = 1,91$  cm und für die Kugeln des Typs 5 Amplituden von  $A = 0,95$  cm bis  $A = 2,54$  cm eingestellt werden. Unterhalb dieser Bereiche kann der Übergang nicht gemessen werden und oberhalb dieser Bereiche ist die Existenz einer Monolage nicht mehr gegeben. Das Phasendiagramm zeigt eine kontra-intuitive Abhängigkeit der kritischen Füllichte  $\mu_{c1}$  von der Amplitude  $A$ . Da sich die kritische Füllichte  $\mu_{c1}$  mit wachsender Amplitude zu kleineren Werten verschiebt, kann der Schwellwert für die Kristallisation bei gleichbleibender Kugelanzahl durch eine Erhöhung der Amplitude und somit durch eine Erhöhung



der den Kugeln zugeführten Energie überschritten werden (s. auch Krüelle et al. (2004)). Ein ähnliches Phänomen wurde von Helbing et al. (2000) mit “freezing by heating” beschrieben. Demgegenüber stellen Metcalfe et al. (2002) einen Phasenübergang von einer festkörperartigen in eine fluidartige Phase unter dem Einfluss einer horizontal linearen Oszillation vor. Dabei wird die Fluidisierung eines mehrlagigen Granulats durch eine Erhöhung der dimensionslosen Beschleunigung  $\Gamma = A\omega^2/g$ , wobei  $g$  die Erdbeschleunigung beschreibt, erreicht.

Im Folgenden werden die Ergebnisse diskutiert und ein Erklärungsversuch für die Kristallisation, d.h. für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase, gegeben. Wenn die Füllichte den kritischen Wert  $\mu_{c1}$  erreicht bzw. überschreitet, hat der Kugelcluster dauerhaften Kontakt zur Wand der oszillierenden Schale (vgl. Unterabschn. 4.1.3). Der Rand dominiert nun gegenüber dem Schalenboden bezüglich der Anregung der Kugeln. Dieser Übergang kann sowohl gesehen als auch gehört werden, weil der Geräuschpegel durch die dann dauerhaft gegen den Schalenrand stoßenden Kugeln wächst. Eine Einzelteilchendynamik, gegeben durch den sich bewegenden Untergrund, ist in der festkörperartigen Phase nicht zu erkennen. Durch den dauerhaften Kontakt des Kugelclusters zur Wand werden die Kugeln ständig komprimiert und neigen daher zu einer Erhöhung ihrer lokalen Packungsdichte. Mit wachsender Füllichte  $\mu$  in der Schale oder wachsender Amplitude äußert sich dies in der Anordnung der Kugeln in einer hexagonalen Kugelpackung.

Alle von uns experimentell bestimmten kritischen Füllichten für den Übergang liegen stets unterhalb von  $\frac{\pi}{4}$ , was dem Wert entspricht, der aufgrund rein geometrischer Überlegungen und im Zusammenhang mit dem Konzept der von Reynolds (1885) formulierten Dilatanz erwartet werden kann. Dabei befinden sich die Kugelmittelpunkte auf einem quadratischen Gitter mit der Kantenlänge eines Kugeldurchmessers  $d$ . Das kann dadurch erklärt werden, dass an der y-Achse in Abbildung 4.17 die globale Füllichte aufgetragen ist, die den Kontrollparameter des Experiments darstellt. Die lokale Dichte in den geclusterten Bereichen ist deutlich höher als die globale Füllichte. Aus demselben Grund liegen auch alle von uns bestimmten kritischen Füllichten für den Übergang in die festkörperartige Phase unter der hexagonal dichtesten Kugelpackung. Dieser Wert berechnet sich zu  $\mu_{hcp} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,91$ . Bei dem Verlauf der experimentellen Daten in Abbildung 4.17 bietet sich ein linearer Regressionsfit an. Dadurch kann zu kleinen Amplituden extrapoliert werden, was die kritische Füllichte für den Grenzwert der Amplitude ( $A = 0$ ) liefert. Sie beträgt  $0,81 \pm 0,01$  für Kugeln des Typs 5 und  $0,76 \pm 0,01$  für Kugeln des Typs 2. Diese Werte sind nur um etwa 3 % bzw. 8,5 % kleiner als der von Rouille et al. (1990) durch numerische Simulationen bestimmte Wert für die zufällige Packungsdichte identischer Scheiben in einem zweidimensionalen System. Oberhalb dieser Packungsdichte wird lokal Ordnung erwartet. Der Unterschied von 5,5 % für die extrapolierten Werte beider Kugelsorten ist vergleichsweise gering, wenn man bedenkt, dass sich die beiden Kugelsorten in

ihrer Größe um 250 % unterscheiden.

Da im Experiment eine Monolage von Kugeln senkrecht von oben im Gegenlichtverfahren aufgenommen wird und somit die Kugeln als scheibenförmige Schatten vor hellem Hintergrund erscheinen, kann der rcp-Wert für Scheiben zum Vergleich herangezogen werden. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass der rcp-Wert einer lokalen Packungsdichte der Scheiben in einem ausgewählten Bereich des Systems entspricht. Die von uns mittels Experimenten extrapolierten Werte für den Phasenübergang zu der festkörperartigen Phase entsprechen globalen Füll-dichten. Im Falle der Betrachtung des Systems ohne Anregung ( $A = 0$ ) muss die Schale fast vollständig gefüllt sein, damit eine hexagonal dichte Kugelpackung hoher Ordnung eintritt. Je höher die Füll-dichte in der Schale, desto geringer ist der Unterschied zu einer lokalen Packungsdichte der Kugeln in einem beliebigen Bereich der Schale. Da oberhalb von  $\mu_{\text{rcp}}$  eine hohe Ordnung für die Scheibenpositionierung erwartet wird und wir den Übergang in eine Phase hoher Ordnung beschreiben, erklärt sich die geringe, zu kleineren Werten gerichtete Abweichung von  $\mu_{\text{cl}}(A = 0)$  zu  $\mu_{\text{rcp}}$ .

Zur Berechnung des Wertes  $\mu_{\text{rcp}}$  werden zwei Möglichkeiten betrachtet. Gemeinsam ist diesen Methoden, dass beide eine auf die Scheiben wirkende Kraft benötigen, damit diese clustern bzw. attraktive Kräfte erfahren. Visscher & Bolsterli (1972) simulieren den Clusterprozess durch das Einwirken der Gravitation auf Scheiben in einem vertikalen System. Nahezu identische Werte erhalten Bideau & Troadec (1984) für die experimentelle Ausführung dieser Methode. Rubinstein & Nelson (1982), Bideau et al. (1986) und Rouille et al. (1990) benutzen in ihren Simulationen Kräfte, die auf Scheiben in einem horizontalen System wirken und diese auf einen zentralen Punkt ziehen. Die auf verschiedene Weise bestimmten Ergebnisse der zufälligen Packungsdichte variieren nur gering und der mittlere Wert bestimmt sich nach Rouille et al. (1990) zu  $\mu_{\text{rcp}} = 0,82957 \pm 0,00655$ .

#### 4.1.6 Vollständige Kristallisation

In diesem Unterabschnitt wird die in Abbildung 4.16 dargestellte Sättigung des Ordnungsparameters  $\beta$  erläutert und mit dem theoretisch zu erwartenden Wert verglichen. Die kritische Füll-dichte für die Sättigung von  $\beta$  wird mit  $\mu_{c2}$  bezeichnet und in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  für Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) bestimmt. Nach Überschreiten der kritischen Füll-dichte  $\mu_{c2}$  wird der Grad der Ordnung in der Anordnung der Kugeln zueinander nicht weiter erhöht. Der Grund dafür liegt darin, dass die Kugeln nach Überschreiten dieser Füll-dichte abgesehen von Korngrenzen und Defektpunkten die hexagonal dichteste Kugelpackung annehmen und somit vollständig kristallisiert sind. Zunächst wird der Gedankengang vorgestellt, der eine analytische Bestimmung der kritischen Füll-dichte für die Sättigung des Ordnungsparameters  $\beta$ , d. h. für die vollständige Kristallisation

der Kugeln erlaubt.

In Abhängigkeit des verwendeten Schalen- und Kugelradius ist die Anzahl der Kugeln, die in die Schale gegeben werden können, begrenzt. Weiterhin hängt die mögliche Anzahl der Kugeln von der Art und Weise der Platzierung der Kugeln in der Schale ab. Zunächst wird die maximale Anzahl der Kugeln in Abhängigkeit von Schalen- und Kugelradius unter der Annahme bestimmt, dass sich die Kugeln in der hexagonal dichtesten Kugelpackung anordnen. Mit Hilfe geometrischer Überlegungen berechnet sich der Wert für die hexagonal dichteste Kugelpackung (vgl. Abb. 3.6) zu

$$\mu_{\text{hcp}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,91. \quad (4.4)$$

Der Platzbedarf pro Kugel, bzw. da die Kugeln im Gegenlichtverfahren als scheibenförmige Schatten erscheinen, der Flächenbedarf pro Scheibe mit Radius  $r$  in der Schale beträgt demnach

$$F_K = \frac{\pi r^2}{0,91}. \quad (4.5)$$

Sei weiter

$$F_S = \pi R^2 \quad (4.6)$$

die Fläche der Schale mit Radius  $R$ . Gesucht ist nun die Anzahl der Kugeln  $N$ , für die gilt:  $F_K = F_S$ . Gleichsetzen liefert

$$\pi R^2 = N \pi r^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\pi}. \quad (4.7)$$

So berechnet sich die Anzahl der Kugeln mit Radius  $r$ , die unter Annahme der hexagonal dichtesten Kugelpackung in eine Schale mit Radius  $R$  gegeben werden können zu

$$N = \pi \frac{R^2}{\pi r^2 / \frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{R}{r} \right)^2. \quad (4.8)$$

Betrachtet man nun den zentralen, kreisförmigen Bereich der Schale, der während der Oszillation mit der Amplitude  $A$  durch Überlagerung verschiedener Schalenpositionen vom Rand der Schale nicht überfahren wird, so berechnet sich die freie Fläche  $F_{S,\text{frei}}$  zu

$$F_{S,\text{frei}} = \pi(R - A)^2. \quad (4.9)$$

Diese freie Fläche ist in Abbildung 4.18 schematisch dargestellt. Daraus berechnet sich die Anzahl der Kugeln  $N$ , die auf dieser freien Fläche  $F_{S,\text{frei}}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  platziert werden können zu

$$N(A) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{R - A}{r} \right)^2, \quad (4.10)$$



Abbildung 4.18: Schematischer Bereich der Schale, der während der horizontalen Oszillation nicht vom Rand der Schale überfahren wird. Gezeigt sind sechs überlagerte Positionen der Schale in einem zeitlichen Abstand von  $t = 0,01$  s. Der Radius dieser kreisförmigen Fläche berechnet sich aus der Differenz von Schalenradius  $R$  und Amplitude  $A$ .

was einer von der Kugelgröße unabhängigen Füllichte von

$$\begin{aligned}
 \mu_{c2,theo}(A) &= N \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = N \left( \frac{r}{R} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{R-A}{r} \cdot \frac{r}{R} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{R-A}{R} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{A}{R} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

entspricht. Da die Kugeln durch die kreisförmige Bewegung der Schale stets ins Innere der Schale gedrängt werden, wird davon ausgegangen, dass sich die Kugeln zunächst auf einer Fläche der Größe von  $F_{S,frei}$  in der hexagonal dichtesten Kugelpackung anordnen, also vollständig kristallisieren, bevor sich der Kugelcluster durch Hinzugabe weiterer Kugeln räumlich ausweitet. Demnach ist die vollständige Kristallisation der Kugeln abgeschlossen, wenn sie möglichst dicht gepackt eine Fläche von  $F_{S,frei}$  einnehmen.

Abbildung 4.19 zeigt den Vergleich zwischen dem theoretisch zu erwartenden Wert der kritischen Füllichte  $\mu_{c2,theo}$  und dem experimentell bestimmten Wert  $\mu_{c2}$  für die vollständige Kristallisation in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ . Die

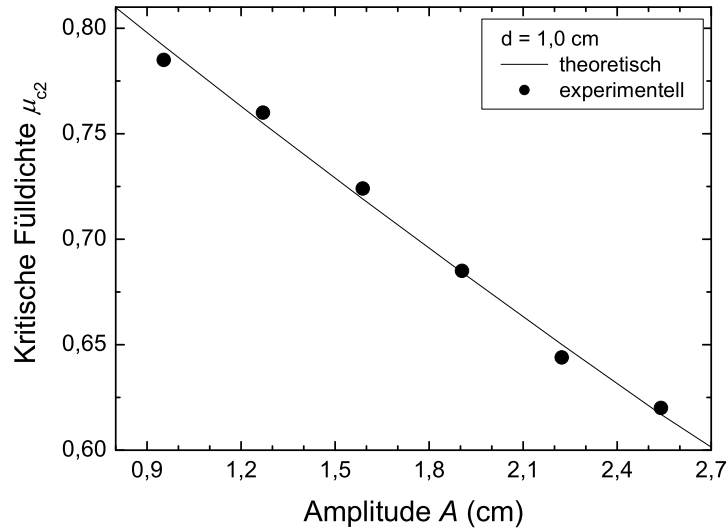


Abbildung 4.19: Vergleich zwischen dem theoretisch zu erwartenden Wert der kritischen Füllichte  $\mu_{c2,\text{theo}}$  und dem experimentell bestimmten Wert  $\mu_{c2}$  für die vollständige Kristallisation in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ .

experimentellen Daten stimmen gut mit den theoretisch zu erwartenden Werten überein. Es zeigt sich ein annähernd linearer Abfall der kritischen Füllichte  $\mu_{c2}$  mit wachsender Amplitude  $A$ . In Gleichung 4.11 überwiegt mit  $R \gg A$  die lineare Abhängigkeit von  $A$ .

#### 4.1.7 Zusammenfassung der Ergebnisse

Da im Verlaufe dieser Arbeit immer wieder Bezug auf diese Ergebnisse genommen wird, werden sie in diesem Unterabschnitt zusammenfassend wiederholt. Es wurde gezeigt, dass das Verhalten der Kugeln in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  in drei Phasen unterteilt werden kann: die plastische, die fluidartige und die festkörperartige Phase.

In der plastischen Phase werden die Kugeln durch den Untergrund der oszillierenden Schale angetrieben. Die Kugeln bewegen sich unabhängig voneinander auf eine Kreisbahn und beeinflussen sich nicht gegenseitig. In der fluidartigen Phase werden die Kugeln sowohl durch den oszillierenden Untergrund als auch durch den Rand der Schale angetrieben. Sie neigen dazu, zu clustern und wechselwirken mittels inelastischer Stöße miteinander. In der festkörperartigen Phase wird der Kugelcluster dauerhaft durch den Rand der Schale komprimiert. Die ständige

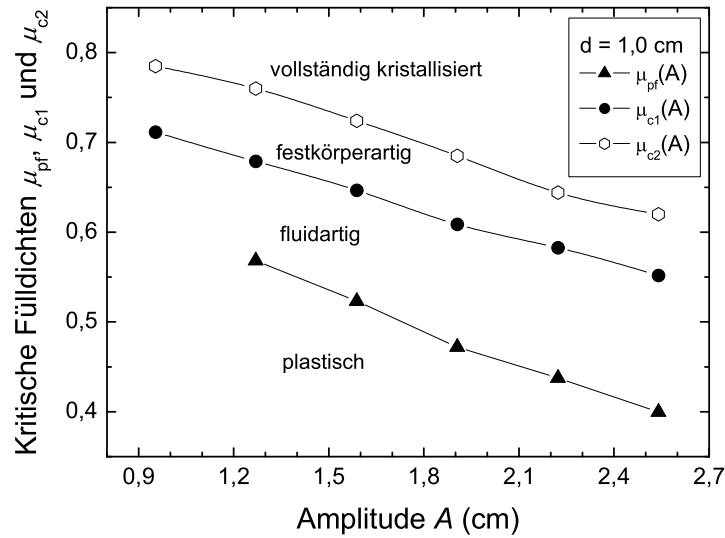


Abbildung 4.20: Phasendiagramm für die kritischen Füllichten  $\mu_{pf}$ ,  $\mu_{c1}$  und  $\mu_{c2}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ .  $\mu_{pf}$  beschreibt die kritische Füllichte für den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase,  $\mu_{c1}$  beschreibt die kritische Füllichte für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase und  $\mu_{c2}$  die für die vollständige Kristallisation der Kugeln.

Komprimierung des Clusters äußert sich in einer strukturierten Anordnung der Kugeln. Diese Strukturbildung ist abgeschlossen, wenn sich die Kugeln, abgesehen von Korngrenzen und Defektpunkten, in der hexagonal dichtesten Gitterstruktur anordnen.

Die kritischen Füllichten für die Übergänge von der plastischen in die fluidartige und von der fluidartigen in die festkörperartige Phase sinken mit wachsender Amplitude und zeigen keine starke Abhängigkeit von der verwendeten Kugelgröße. Während der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase sprunghaft und hysteretisch ist, zeigt der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase einen kontinuierlichen Verlauf. Abbildung 4.20 zeigt das gesamte vermessene Phasendiagramm dieses Systems für Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm).

## 4.2 Geschwindigkeitsverteilungen

In diesem Abschnitt werden die Geschwindigkeitsverteilungen für Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für eine feste Amplitude  $A = 1,27$  cm vorgestellt. Der verwendete Kugeltyp und die eingestellte Amplitude ( $A = 1,27$  cm) erfüllen die in Abschnitt 3.4 des vorangegangenen Kapitels beschriebenen Voraussetzungen zur Bestimmung der einzelnen Kugelgeschwindigkeiten.

Es wird jeweils eine Geschwindigkeitsverteilung für die plastische Phase, die fluidartige Phase, die festkörperartige Phase sowie für den Zustand vollständiger Kristallisation gezeigt. Die Verteilungen der verschiedenen Phasen werden miteinander verglichen und ihre Entwicklung in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  diskutiert. Außerdem wird untersucht, inwieweit die Verteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  einer Gauß-Verteilung entsprechen. Weiterhin wird in Unterabschnitt 4.2.3 geprüft, ob der in Unterabschnitt 4.1.5 beschriebene Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase anhand der Topologie der Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  beschrieben werden kann.

Alle hier dargestellten Verteilungen zeigen die horizontale Komponente  $v_x$  der Kugelgeschwindigkeiten. Die dazu senkrechte Komponente  $v_y$  verhält sich identisch und ist analog zu behandeln. Die Verteilungen sind so normiert, dass das Integral über die Verteilungsfunktion stets Eins ist. Es sei weiterhin darauf hingewiesen, dass die Geschwindigkeitsverteilungen im mitbewegten Bezugssystem der Schale bestimmt werden und die Frequenz der Anregung  $\nu = 1,67$  Hz beträgt. Der Bezug zu den Kugelgeschwindigkeiten im Laborsystem ist

$$v_{x,\text{mit}} = v_{x,\text{lab}} - A\omega \sin \omega t, \quad (4.12)$$

wobei  $A$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit beschreibt.  $v_{x,\text{mit}}$  steht für die Geschwindigkeiten der Kugeln im mitbewegten System der Schale und  $v_{x,\text{lab}}$  für die Geschwindigkeiten im Laborsystem.

Die Bildaufnahme mit maximaler Bildwiederholungsfrequenz  $\nu_a = 59,94$  Hz ist Voraussetzung für die eindeutige Zuordnung der Kugelpositionen zweier aufeinander folgender Bilder. Daher können aus den in Abschnitt 3.3 des vorangegangenen Kapitels dargestellten Gründen nur 1000 aufeinander folgende Bilder aufgenommen werden. Zur Bestimmung einer Geschwindigkeitsverteilung ist es jedoch nicht notwendig, dass alle zugrunde liegenden Aufnahmen ausnahmslos mit gleichem zeitlichen Abstand vorliegen. Je zwei Aufnahmen mit bekanntem und hinreichend kleinem zeitlichen Abstand werden zur Bestimmung von  $N$  Kugelgeschwindigkeiten herangezogen. Daher werden zu jeder betrachteten Füllichte  $\mu$  zwanzigmal 1000 Bilder aufgenommen. Daraus erhält man jeweils  $19980 \cdot N$  Geschwindigkeiten zur Bestimmung einer Geschwindigkeitsverteilung.

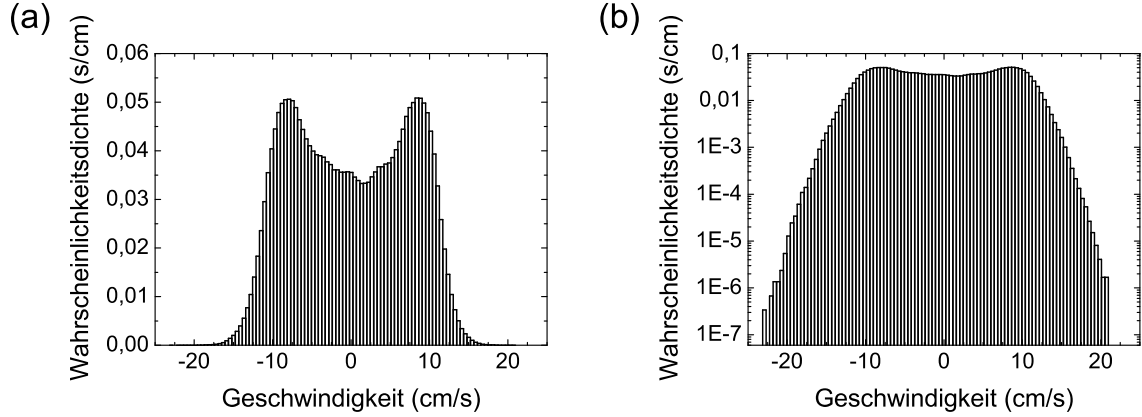


Abbildung 4.21: Normierte Geschwindigkeitsverteilung der horizontalen Komponente  $v_x$  für  $N = 335$  Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,4$ ,  $d = 1,0$  cm) in (a) linearer und (b) logarithmischer Auftragung. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

Der Bereich zwischen der maximal bestimmten Geschwindigkeit  $v_{x,\max}$  und der minimalen Geschwindigkeit  $v_{x,\min}$  wird jeweils in 100 Intervalle der Breite  $S_I = |v_{x,\max} - v_{x,\min}|/100$  unterteilt. Dabei ist  $v_{x,\max}$  stets positiv und  $v_{x,\min}$  stets negativ. Bei einer perfekt symmetrischen Verteilung ist  $v_{x,\min} = -v_{x,\max}$ . Die Höhe der Balken in Abbildung 4.21 (a), 4.22 (a), 4.23 (a) und 4.24 (a) repräsentiert die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten der Geschwindigkeiten  $v \pm \Delta v/2$ , wobei  $\Delta v$  der Intervallbreite  $S_I$  entspricht.

#### 4.2.1 Variation der Füllichte $\mu$

Abbildung 4.21 (a) zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für 335 Kugeln ( $\mu = 0,4$ ) in der plastischen Phase. Man sieht zwei symmetrisch um Null lokalisierte Maxima bei  $v_1 = (-8,36 \pm 0,22)$  cm/s und  $v_2 = (8,39 \pm 0,22)$  cm/s. Dabei entspricht  $0,22$  cm/s der halben Intervallbreite  $S_I/2$ , und  $-8,36$  cm/s bzw.  $8,39$  cm/s sind die zentralen Werte der entsprechenden Intervalle. Damit nehmen die meisten Kugeln einen Geschwindigkeitsbetrag an, der im Mittel  $65,7\%$  der maximalen Schalengeschwindigkeit  $v_{S,\max} = A2\pi\nu = 13,32$  cm/s beträgt. Aus der logarithmischen Auftragung der Verteilung in Abbildung 4.21 (b) kann der Geschwindigkeitsbetrag abgelesen werden, den die Kugeln maximal annehmen. Dieser wird aus dem Mittelwert des Betrags der kleinsten negativen Geschwindigkeit  $|v_{x,\min}|$  und der größten positiven Geschwindigkeit  $v_{x,\max}$  errechnet und beträgt  $|\langle v_{x,\max} \rangle| = 21,8$  cm/s. Dies ist eine um  $70\%$  höhere Geschwindigkeit als die maximale Schalengeschwindigkeit  $v_{S,\max}$  und wird unter anderem durch einzelne Kugel-Rand-Stöße hervorgerufen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten hoher Geschwindigkeitsbe-



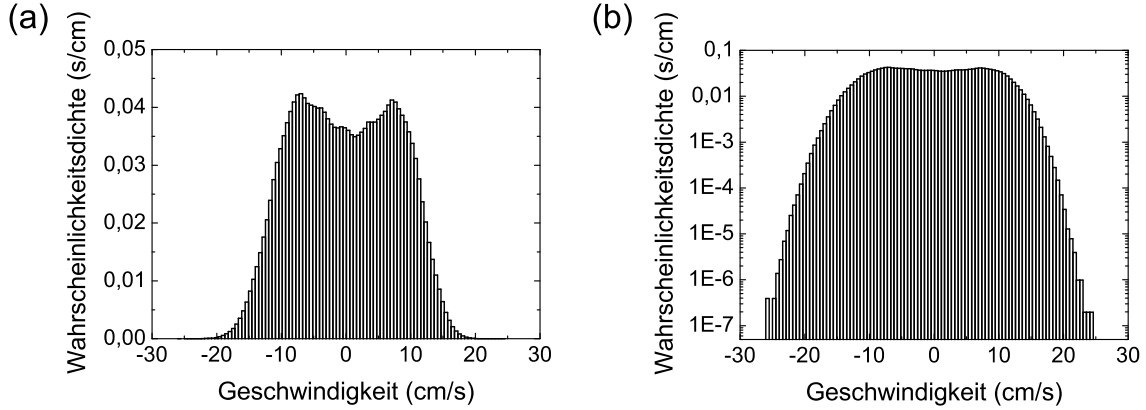


Abbildung 4.22: Normierte Geschwindigkeitsverteilung der horizontalen Komponente  $v_x$  für  $N = 480$  Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,57$ ,  $d = 1,0$  cm) in (a) linearer und (b) logarithmischer Auftragung. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

träge liegt zwischen  $10^{-6}$  s/cm und  $10^{-7}$  s/cm. Dabei bezeichnen wir solche Geschwindigkeitsbeträge als hoch, die den gleichen Intervallen zuzuordnen sind wie  $v_{x,\min}$  bzw.  $v_{x,\max}$ . Bei einer Verteilung von  $19980 \cdot N$  Geschwindigkeiten liegt man in diesem Bereich an der Grenze der Diskretisierung einzelner Geschwindigkeiten. Die Höhe des jeweils äußersten Balkens in Abbildung 4.21 (b) repräsentiert somit die Geschwindigkeiten einiger weniger Kugeln. Bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen ist ein von den beiden Maxima eingeschlossenes, verrauschtes Minimum zu sehen. Als klein werden diejenigen Geschwindigkeitsbeträge bezeichnet, deren Abstand zu Null nicht größer ist als die halbe Intervallbreite  $S_I/2$ . Für die so gewählte Auftragung der Daten beträgt die Wahrscheinlichkeitsdichte in Abbildung 4.21 (a) für das Auftreten kleiner Geschwindigkeitsbeträge 0,034 s/cm. Aufgrund des verrauschten Verlaufs der Verteilung in diesem Bereich wird dieser Wert durch die Anpassung einer Fitfunktion der Form  $y = p_1 + p_2x^2 + p_3x^4$  an die experimentellen Daten in Abbildung 4.21 (a) ermittelt. Die Anpassung dieser Funktion an die experimentellen Daten ist an dieser Stelle nicht weiter von Bedeutung. Der Grund sowie die Art und Weise der Anpassung werden in Unterabschnitt 4.2.3 ausführlich diskutiert.

Um die Geschwindigkeitsverteilung der plastischen Phase mit der Verteilung der fluidartigen Phase zu vergleichen, wird die Füllichte  $\mu$  um 19 % erhöht. Abbildung 4.22 (a) zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für 480 Kugeln ( $\mu = 0,57$ ). Es sind weiterhin zwei Maxima zu sehen, die symmetrisch um Null lokalisiert sind und ein Minimum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen einschließen. Im Gegensatz zur plastischen Phase sind die Geschwindigkeitsintervalle höchster Wahrscheinlichkeitsdichte mit  $v_1 = (-6,95 \pm 0,26)$  cm/s und  $v_2 = (7,14 \pm 0,26)$  cm/s um etwa 16 % zu kleineren Geschwindigkeitsbeträgen verschoben. Das Minimum

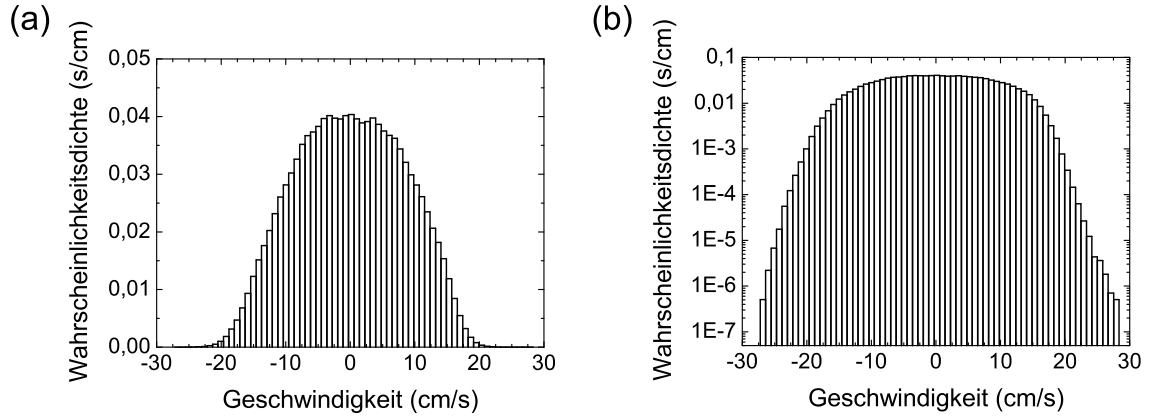


Abbildung 4.23: Normierte Geschwindigkeitsverteilung der horizontalen Komponente  $v_x$  für  $N = 590$  Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,7$ ,  $d = 1,0$  cm) in (a) linearer und (b) logarithmischer Auftragung. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

der Wahrscheinlichkeitsdichte bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen ist mit einem Wert von  $0,036$  s/cm um 5 % geringer ausgeprägt. In dieser Phase werden maximale Geschwindigkeitsbeträge von bis zu  $25$  cm/s erreicht (Abb. 4.22 (b)). Dies sind um 14 % höhere Geschwindigkeitsbeträge als in der plastischen Phase.

Durch eine weitere Erhöhung der Füllichte  $\mu$  um 14 % auf  $\mu = 0,7$  gelangt das System in die festkörperartige Phase. Die beiden Maxima in der Geschwindigkeitsverteilung sind nicht mehr präsent (Abb. 4.23 (a)). Es hat ein Übergang von zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu einem Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen stattgefunden. Der Wert des Maximums und somit die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten kleiner Geschwindigkeitsbeträge beträgt  $0,04$  s/cm und ist damit um 11 % höher als in der fluidartigen Phase. Gleichzeitig nehmen einige Kugeln Geschwindigkeitsbeträge von bis zu  $27,1$  cm/s an (Abb. 4.23 (b)). Im Gegensatz zur fluidartigen Phase ist dies eine Steigerung um 8,5 %.

Um von der festkörperartigen Phase in den Zustand vollständiger Kristallisation zu gelangen, wird die Füllichte  $\mu$  um 11 % erhöht. Abbildung 4.24 zeigt die entsprechende Geschwindigkeitsverteilung für 670 Kugeln ( $\mu = 0,8$ ). Das Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen ist nach wie vor präsent. Im Zustand vollständiger Kristallisation ist dieses mit einem Wert von  $0,1$  s/cm jedoch auf Kosten höherer Geschwindigkeitsbeträge um 150 % stärker ausgeprägt und somit auch schärfer als in der festkörperartigen Phase. Die Kugeln zeigen nur in einem sehr geringen Maße eine Bewegung relativ zu der oszillierenden Schale. Trotzdem erreichen einige Kugeln Geschwindigkeitsbeträge von bis zu  $29,7$  cm/s. Dieser Wert ist um 9 % höher als in der festkörperartigen Phase.

In Abbildung 4.25 ist eine Übersicht über die bisherigen Ergebnisse zu se-

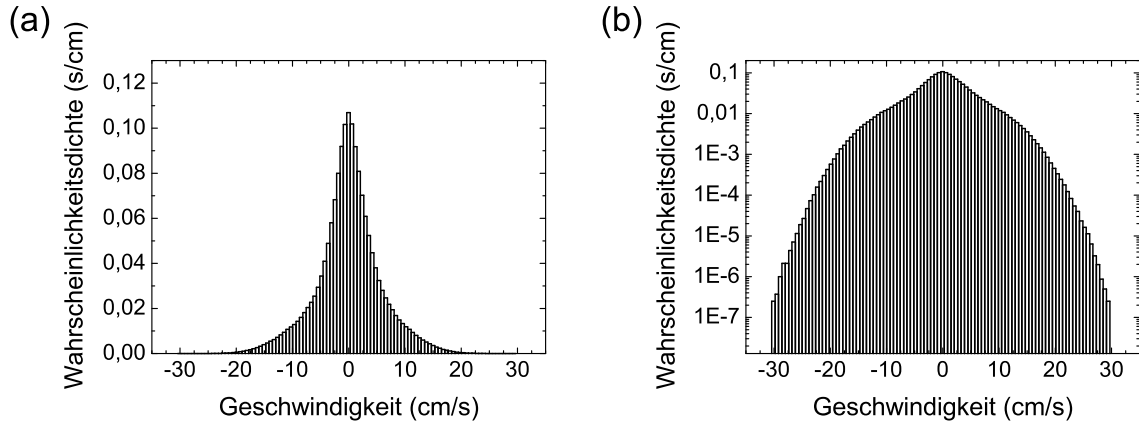


Abbildung 4.24: Normierte Geschwindigkeitsverteilung der horizontalen Komponente  $v_x$  für  $N = 670$  Kugeln des Typs 5 ( $\mu = 0,8$ ,  $d = 1,0$  cm) in (a) linearer und (b) logarithmischer Auftragung. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

hen. Der Betrag der Maximalgeschwindigkeit zeigt einen linearen Anstieg mit wachsender Füllichte  $\mu$  (○). Der Geschwindigkeitsbetrag, der von den Kugeln am häufigsten angenommen wird, sinkt für wachsende Füllichten  $\mu$  bis das System in die festkörperartige Phase gelangt (■). Dabei ist der Abfall von der fluidartigen in die festkörperartige Phase stärker, als von der plastischen in die fluidartige Phase. Für weiter anwachsende Füllichten nehmen die meisten Kugeln kleine Geschwindigkeitsbeträge, d. h. Geschwindigkeiten von  $(0 \pm S_I/2)$  cm/s an.

### Vergleich mit einer Gauß-Verteilung

Da die statistische Verteilung unabhängiger Messungen einer Größe oft einer Gauß-Verteilung entspricht, wird an dieser Stelle geprüft, inwieweit die vorgestellten Verteilungen gaußverteilt sind. Dazu werden jeweils die quadrierten Geschwindigkeiten der einzelnen Verteilungen gegen die logarithmische Skala der Wahrscheinlichkeitsdichte aufgetragen (Abb. 4.26). Für eine perfekte Gauß-Verteilung der Geschwindigkeiten erwarten wir für diese Art der Auftragung, dass die experimentellen Datenpunkte auf einer Geraden liegen. Man kann erkennen, dass die Datenpunkte für wachsende quadrierte Geschwindigkeiten leicht auseinander laufen. Es bilden sich zwei Äste, die ein unterschiedliches Gefälle aufzeigen, wie es für die Füllichte  $\mu = 0,57$  besonders gut zu sehen ist (Abb. 4.26 (b)). Der Grund dafür liegt in der Quadrierung sowohl der negativen als auch der positiven Geschwindigkeiten. Dabei sind die Werte für die positiven Geschwindigkeiten durch die ausgefüllten Symbole (●) und die Werte für die negativen Geschwindigkeiten durch die offenen Symbole (○) dargestellt. Bei perfekter Achsensymmetrie

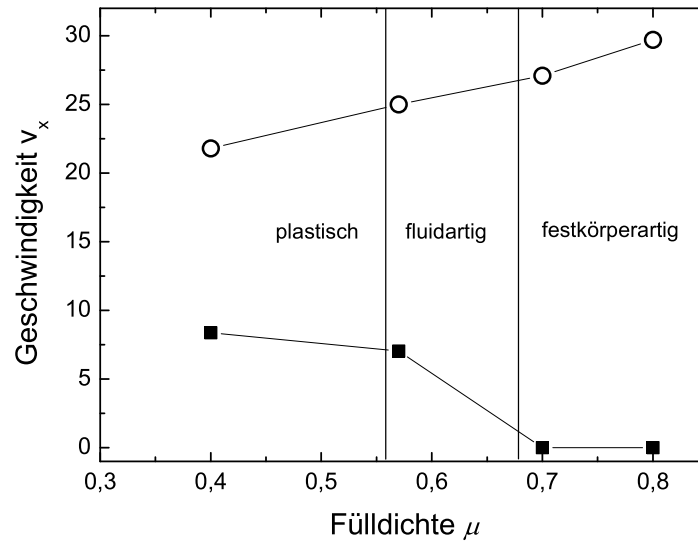


Abbildung 4.25: Betrag der Maximalgeschwindigkeit (○) und Betrag der häufigsten Kugelgeschwindigkeit (■) in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für die Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

der Verteilungen in den Abbildungen 4.21, 4.22, 4.23 und 4.24 um Null, erwarten wir zwei deckungsgleiche Abfälle der quadrierten negativen und positiven Geschwindigkeiten. Je weiter die beiden Äste jedoch auseinander laufen, desto asymmetrischer ist die entsprechende Verteilung.

Der Ursprung der Asymmetrie in den Verteilungen liegt wahrscheinlich in der Sensibilität der Kugelgeschwindigkeiten gegenüber einer ungenauen Justage der Schale auf dem Schwenktisch zum Zeitpunkt der Messdurchführung. Die horizontale Ausrichtung der Schale wird zwar, wie in Abschnitt 3.6 beschrieben, für jede Messdurchführung überprüft, jedoch reagieren die Kugeln sehr empfindlich und für den Beobachter nicht unmittelbar erkennbar auf kleinste Ungenauigkeiten. Weiterhin ist bei der Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilungen nicht gewährleistet, dass die Kugeln bzw. der Kugelcluster eine ganzzahlige Anzahl an Oszillationen in der Schale durchführen. Wie zuvor beschrieben, werden die Verteilungen durch Aufnahme und Auswertung von jeweils zwanzigmal 1000 Aufnahmen bestimmt. Dabei entsprechen 1000 Aufnahmen einem Zeitraum von 16,68 s. Die Anzahl der Oszillationen des Kugelclusters in diesem Zeitraum ist unbekannt. Eine nicht ganzzahlige Anzahl an Oszillationen des Kugelclusters kann zu einer Asymmetrie in der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung führen. Dieser Effekt ist umso stärker, je weniger Geschwindigkeiten zur Bestimmung der

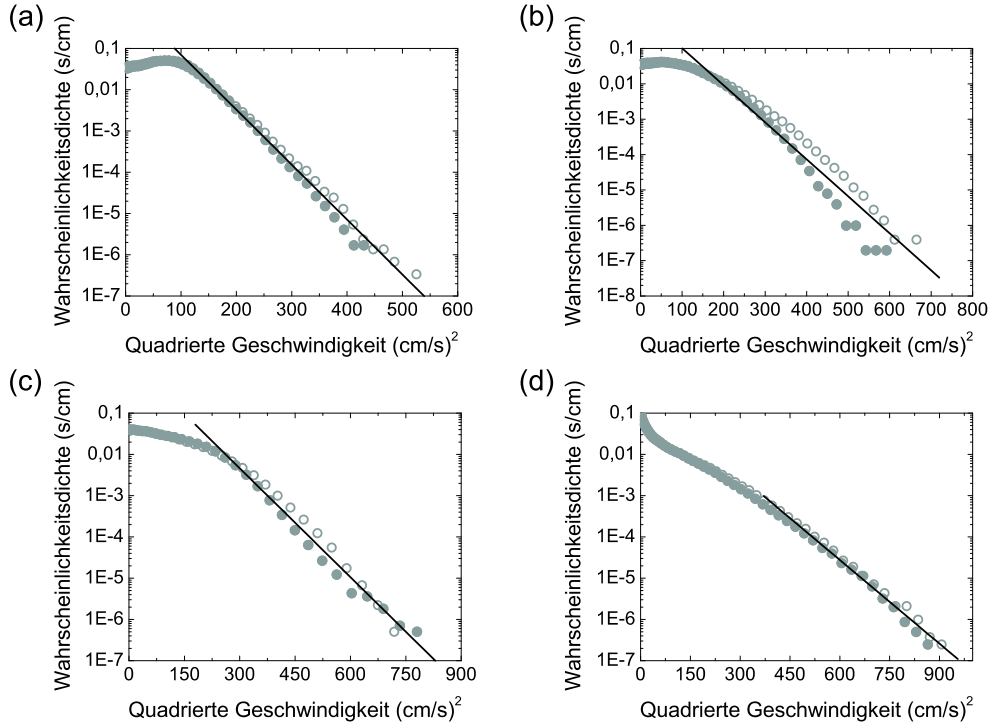


Abbildung 4.26: Logarithmische Auftragung der Wahrscheinlichkeitsdichte für die quadrierten Geschwindigkeiten der Kugeln des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) zur Überprüfung einer Gauß-Verteilung. Betrachtet werden die Verteilungen der Geschwindigkeiten für die Füllgrade (a)  $\mu = 0,4$  (plastische Phase), (b)  $\mu = 0,57$  (fluidartige Phase), (c)  $\mu = 0,7$  (festkörperartige Phase) und (d)  $\mu = 0,8$  (Zustand vollständiger Kristallisation). Die Symbole repräsentieren die experimentellen Daten der negativen ( $\circ$ ) und positiven ( $\bullet$ ) quadrierten Geschwindigkeiten. Die Linien beschreiben lineare Fits an ausgewählte Bereiche dieser Daten. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm.

Verteilung in Betracht gezogen werden. Die Asymmetrie ist demnach auch ein Zeichen dafür, dass die in den Abbildungen 4.21, 4.22, 4.23 und 4.24 gezeigten Verteilungen noch nicht auskonvergiert sind.

Die durchgezogenen Linien in Abbildung 4.26 zeigen die Anpassung einer Geraden an einen ausgewählten Bereich der experimentellen Daten ( $\circ$ ). Um eine Gerade an die Datenpunkte anzupassen, wird die quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit der Anzahl an Datenpunkten, die zur Anpassung herangezogen werden, ermittelt. Das Ergebnis für die vier in Abbildung 4.26 (a)-(d) dargestellten Verteilungen ist in Abbildung 4.27 zu sehen. Ausgehend vom Ursprung in Abbildung 4.26 (a)-(d) werden immer weniger Datenpunkte für die Anpassung der Geraden herangezogen. Sobald die quadratische Abweichung  $\chi^2$  ein Minimum

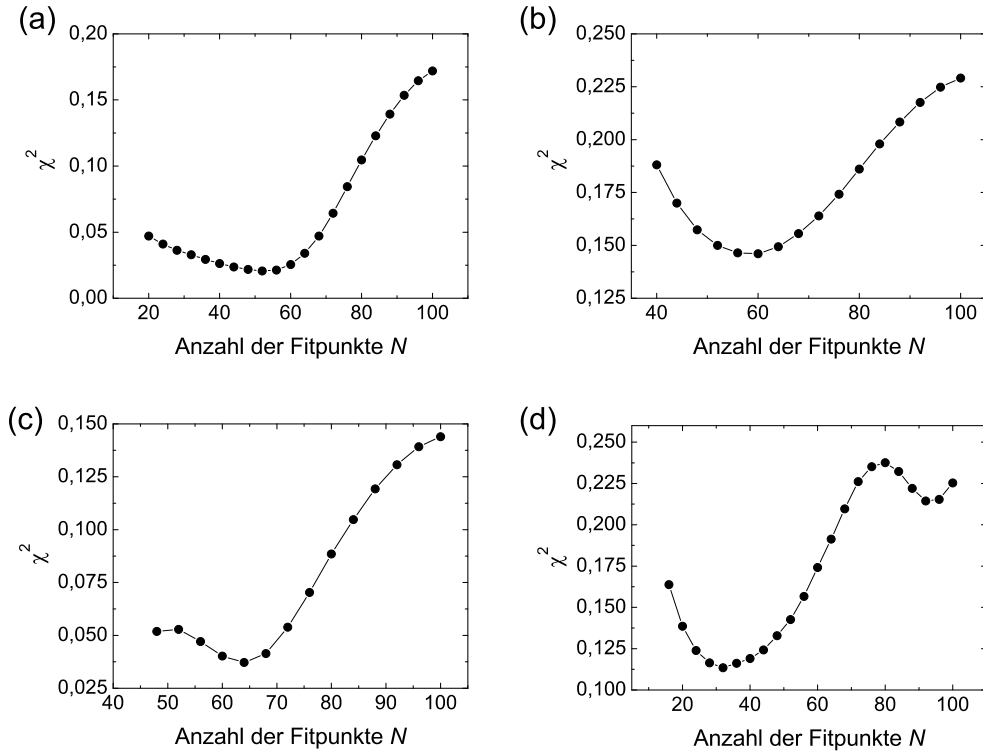


Abbildung 4.27: Quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit der Anzahl an Datenpunkten, die zur Anpassung einer Geraden an die experimentellen Daten (o) aus Abbildung 4.26 (a)-(d) herangezogen werden. (a) plastische Phase ( $\mu = 0,4$ ), (b) fluidartige Phase ( $\mu = 0,57$ ), (c) festkörperartige Phase ( $\mu = 0,7$ ) und (d) Zustand vollständiger Kristallisation ( $\mu = 0,8$ ).

durchläuft oder der Wert für  $\chi^2$  saturiert, ist der Bereich gefunden, in dem sich die jeweilige Geschwindigkeitsverteilung gaußförmig verhält. Der Anstieg der Werte für  $\chi^2$  links des Minimums zu einer kleineren Anzahl an Fitpunkten in Abbildung 4.27 (a)-(d) ist das Resultat der Asymmetrie der Verteilungen und damit des Auseinanderlaufens der beiden Äste quadrierter negativer und positiver Geschwindigkeiten.

In der plastischen Phase findet man ein Minimum bei 48 Fitpunkten (Abb. 4.27 (a)) ausgehend von großen Geschwindigkeiten in Abbildung 4.26 (a). Dem entsprechen die Geschwindigkeitsintervalle bei  $(\pm 10,6 \pm 0,22)$  cm/s in Abbildung 4.26 (a). Die Geschwindigkeitsbeträge dieser Intervalle liegen etwa 2,5 % über denjenigen, die von den meisten Kugeln in dieser Phase angenommen werden. Da die Anzahl der Fitpunkte in Abbildung 4.27 ausgehend vom Zentrum reduziert wird, verhalten sich lediglich die Flanken der Verteilung in Abbildung 4.21 gaußförmig.

In der fluidartigen Phase ist ein Minimum bei 60 Fitpunkten zu sehen (Abb.

4.27 (b)). Die entsprechenden Geschwindigkeitsintervalle in Abbildung 4.26 (b)) liegen bei  $(\pm 10,64 \pm 0,26)$  cm/s. Es verhält sich demzufolge der Teil der Verteilung in Abbildung 4.22 gaußförmig, der Geschwindigkeitsbeträge größer als 10,64 cm/s darstellt. Im Gegensatz zur plastischen Phase hat sich der Anteil der Geschwindigkeitsverteilung an einer Gauß-Verteilung nicht nennenswert verändert.

In der festkörperartigen Phase liegt das Minimum bei 64 Fitpunkten (Abb. 4.27 (c)). Die Geschwindigkeitsbeträge der Intervalle bei  $(\pm 15,015 \pm 0,42)$  cm/s (Abb. 4.26 (c)) entsprechen einem um etwa 50 % höheren Wert gegenüber der fluidartigen Phase. Im Zustand vollständiger Kristallisation liegen die Geschwindigkeitsintervalle mit 32 Fitpunkten (Abb. 4.27 (d)) bei  $(\pm 20,39 \pm 0,3)$  cm/s (Abb. 4.26 (d)). Im Gegensatz zur festkörperartigen Phase bei der Füllichte  $\mu = 0,7$  ist dies eine weitere Steigerung um etwa 26 %.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die vorgestellten Verteilungen nur in einem bestimmten Bereich ihrer Flanken gaußverteilt sind. Der Anteil der Flanken, der einer Gauß-Verteilung gehorcht, nimmt mit wachsender Füllichte  $\mu$  nach außen hin ab. Der jeweils zentrale Bereich der Verteilungen verhält sich unabhängig von der betrachteten Füllichte  $\mu$  nicht gaußförmig.

## 4.2.2 Diskussion der Ergebnisse

Für ein Granulat unter dem Einfluss einer Oszillation sind die zuvor dargestellten Abweichungen von einer Gauß-Verteilung untypisch. Rouyer & Menon (2000) und Olafsen & Urbach (1998) untersuchen experimentell das Verhalten eines Granulats in einer gasartigen Phase unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation. Beide finden starke Abweichungen von einer Gauß-Verteilung in den Flanken der Verteilung bei hohen Geschwindigkeitsbeträgen, während die Abweichungen im zentralen Bereich bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen gering sind. Olafsen & Urbach (1998) vergleichen sowohl die Geschwindigkeitsverteilungen eines Granulats im gasartigen Zustand als auch die im fluidartigen und festkörperartigen Zustand mit einer Gauß-Verteilung. Sie erhalten unabhängig von der Phase, in dem sich das Granulat befindet, ähnliche Abweichungen in den Flanken bei hohen Geschwindigkeitsbeträgen. Losert et al. (1999b) untersuchen das Verhalten einer Monolage von Kugeln unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation. Sie begründen die Abweichungen von einer Gauß-Verteilung damit, dass die Stoßfrequenz zweier Kugeln die gleiche Größenordnung hat, wie die Stoßfrequenz zwischen Kugeln und der vibrierenden Unterlage. Die Form der Verteilung wird somit durch die Art und Weise der Energiezufuhr der Kugeln mitbestimmt. Puglisi et al. (1999) vergleichen numerisch bestimmte Geschwindigkeitsverteilungen unter Verwendung der kinetischen Gastheorie für die Beschreibung eines granularen Gases und bestätigen die Abhängigkeit der Verteilungen von der Art der Energiezufuhr. Weiterhin begründen sie die Abweichungen in den Flanken der Verteilungen von

einer Gauß-Verteilung mit der Wechselwirkung der Teilchen mittels inelastischer Stöße und damit verbundenen Clusterprozessen. Demgegenüber zeigen Kudrolli & Henry (2000) jedoch, dass Abweichungen von einer Gauß-Verteilung auch bei Abwesenheit von Clusterprozessen auftreten können. Sie finden ebenfalls eine Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung eines granularen Gases von der Art der Anregung, genauer von dem Verhältnis der Stoßfrequenz zweier Kugeln zu der Stoßfrequenz einer Kugel mit der vibrierenden Wand.

Obwohl in dem hier vorgestellten System keine gasartige Phase zu beobachten ist, ziehen wir diese Erkenntnisse heran, um die dargestellten Abweichungen von einer Gauß-Verteilung zu begründen. Eine mögliche Erklärung für die untypische Abweichung der hier vorgestellten Verteilungen von einer Gauß-Verteilung ist demnach der dauerhafte Kontakt der Kugeln mit dem oszillierenden Untergrund bzw. dem Rand der Schale. Somit ist die Topologie der Geschwindigkeitsverteilung durch die horizontal kreisförmig oszillierende Schale entscheidend mitbestimmt. Auch bei kleineren Füllichten als den hier vorgestellten, erwarten wir keine Gauß-Verteilung aller auftretenden Geschwindigkeiten, da sich das Verhalten der Kugeln bei kleineren Füllichten  $\mu$  nicht von dem der plastischen Phase unterscheiden wird. Der Grund dafür wird in der folgenden Diskussion der Entwicklung der Topologie der Verteilungen in Abhängigkeit von der Füllichte  $\mu$  ersichtlich.

Die in Abbildung 4.21 dargestellte Präsenz zweier symmetrisch um Null lokalisierter Maxima in der plastischen Phase unter dem Einfluss einer kreisförmigen Oszillation der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  ist zu erwarten. Kondic (1999) verweist darauf, dass eine Kugel  $k$ , die auf einer Unterlage liegt, welche mit  $a_S$  in horizontaler Richtung beschleunigt wird, eine Beschleunigung  $a_k = \frac{2}{7}a_S$  in Richtung der Beschleunigung der Unterlage erfährt. Unter der Annahme, dass der Auflagepunkt der Kugel und die Unterlage die gleiche Geschwindigkeit haben, kann das durch die Bewegung der Unterlage hervorgerufene Drehmoment der Kugel bestimmt werden. Daraus kann für die transversale Beschleunigung der Kugel die genannte Beziehung hergeleitet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Kugel weder rutscht noch durch Rollreibung eine Beschleunigung entgegen ihrer Bewegungsrichtung erfährt. Da das Verhalten der Kugeln im mitbewegten Bezugssystem der oszillierenden Schale diskutiert wird, erwarten wir für eine Kugel, die unter Vernachlässigung der Rollreibung einzig durch den Untergrund der Schale angetrieben wird, eine Beschleunigung von  $a_k = -\frac{5}{7}a_S$  in Richtung der Beschleunigung der Schale. Unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Beschleunigung der Schale über den Zeitraum  $t + dt$  bewegt sich die Kugel dann mit der Geschwindigkeit  $v_k(t) = -\frac{5}{7}v_S(t)$ , wobei  $v_S(t)$  die Geschwindigkeit der Schale zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt.

Die kreisförmige Bewegung der Schale lässt sich in zwei senkrecht zueinander



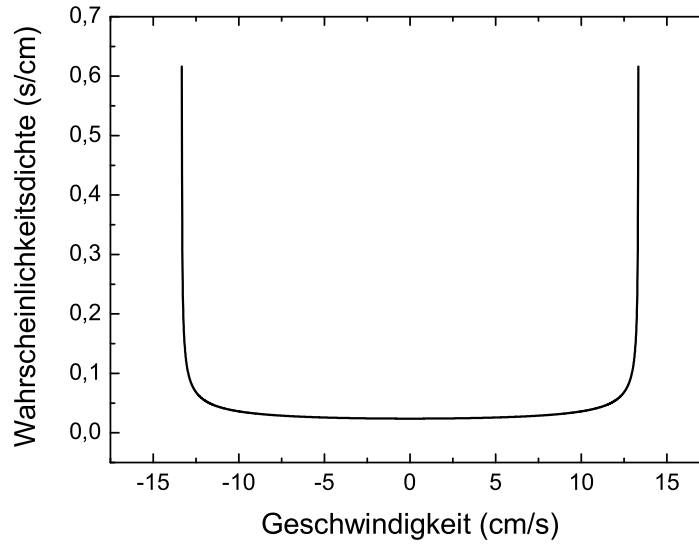


Abbildung 4.28: Analytische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte einer zeitlich abhängigen, sinusförmigen Geschwindigkeit mit Amplitude  $A = 1,27$  cm und Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

ausgerichtete x- und y-Komponenten zerlegen. Für die zeitabhängigen Geschwindigkeiten beider Komponenten gilt:

$$v_{S,x} = A2\pi\nu\sin(2\pi\nu t) \quad \text{und} \quad v_{S,y} = A2\pi\nu\sin(2\pi\nu t + \pi/2). \quad (4.13)$$

$A2\pi\nu$  beschreibt die Maximalgeschwindigkeit der Schale und wird mit  $v_{S,\max}$  bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden nur eine Komponente der Schalengeschwindigkeit  $v_S$ , da auch nur eine Geschwindigkeitskomponente der Kugeln diskutiert wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der zeitlich abhängigen, sinusförmigen Geschwindigkeit einer Komponente der Schalengeschwindigkeit zeigt eine kontinuierliche Funktion  $f(v)$  mit zwei Polstellen bei  $v = \pm v_{S,\max}$  und einem Minimum bei  $v = 0$  cm/s (Abb. 4.28). Der analytische Ausdruck lautet

$$f(v) = \frac{1}{v_{S,\max}\pi\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}}, \quad (4.14)$$

wobei  $v_{S,\max}\pi$  ein Normalisierungsfaktor ist. Um diesen Ausdruck herzuleiten, betrachtet man eine zeitlich sinusverteilte Geschwindigkeit in dem Intervall  $I$   $[-\pi/2, \pi/2]$ . Die Wahrscheinlichkeit  $f(v)dv$  für das Auftreten des Geschwindig-

keitsintervalls  $dv$  beträgt dann

$$f(v)dv = \frac{dt}{T/2}, \quad (4.15)$$

wobei  $T = 1/\nu$  die Periodendauer ist. Wir betrachten Geschwindigkeiten der Form

$$v = v_{S,\max} \cdot \sin(2\pi\nu t). \quad (4.16)$$

Auflösen nach der Zeit  $t$  ergibt:

$$t = \frac{1}{2\pi\nu} \arcsin\left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right) \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{dv} = \frac{1}{2\pi\nu v_{S,\max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}}. \quad (4.18)$$

Damit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Geschwindigkeitsintervalls  $dv$  zu

$$f(v)dv = \frac{dv}{2\pi\nu v_{S,\max} \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}} \quad (4.19)$$

bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte zu

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{2\pi\nu v_{S,\max} \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{v_{S,\max}\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wie man leicht überprüfen kann, ist das Integral über 4.20 auf Eins normiert, denn

$$\int_{-v_{S,\max}}^{v_{S,\max}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{S,\max}}\right)^2}} dv = v_{S,\max}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = v_{S,\max}\pi. \quad (4.21)$$

Um die kontinuierliche Funktion  $f(v)$  der analytisch bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Balkendiagramm der experimentellen Verteilung in Abbildung 4.21 vergleichen zu können, muss  $f(v)$  dahingehend modifiziert werden, dass gilt:

$$\sum_{n=0}^{N^*-1} f_{\text{mod},n}(v)\Delta v = 1 \quad \text{mit} \quad N^* = \frac{2v_{S,\max}}{\Delta v}. \quad (4.22)$$

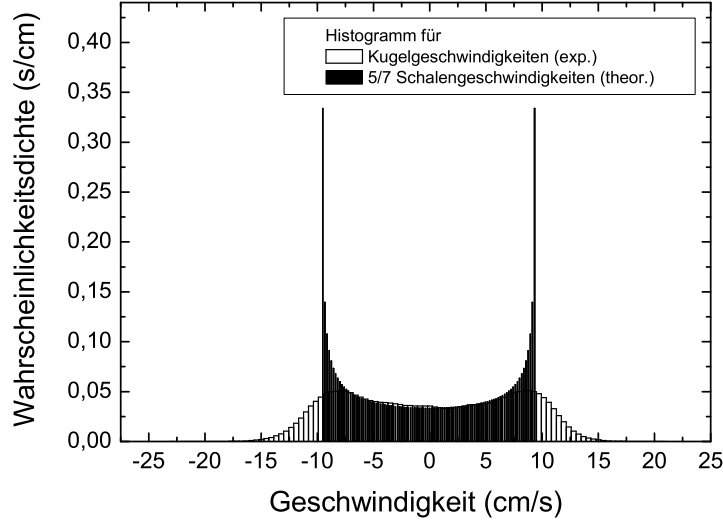


Abbildung 4.29: Vergleich zwischen der theoretisch zu erwartenden Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\text{mod}}$  der Kugelgeschwindigkeiten in der plastischen Phase und der experimentell bestimmten Verteilung bei der Amplitude  $A = 1,27$  cm und der Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

Dabei entspricht  $\Delta v$  der Intervallbreite  $S_I$ . Außerdem soll berücksichtigt werden, dass die Geschwindigkeit einer reibungsfrei rollenden Kugel  $-5/7$  der zeitgleichen Schalengeschwindigkeit entspricht. Die modifizierte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\text{mod}}(v)$  für die Geschwindigkeit einer Kugel auf einer sinusförmig oszillierenden Unterlage berechnet sich dann zu

$$f_{\text{mod}}(v) = \frac{1}{-\frac{5}{7}v_{S,\text{max}}\pi\Delta v} \int_{v-\Delta v/2}^{v+\Delta v/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{-\frac{5}{7}v_{S,\text{max}}}\right)^2}} dv. \quad (4.23)$$

Der Integrand beschreibt die erste Ableitung von  $\arcsin\left(\frac{v}{-\frac{5}{7}v_{S,\text{max}}}\right)$ , daher kann dieses Integral analytisch gelöst und zum Vergleich mit den experimentellen Daten herangezogen werden (Abb. 4.29).

Da die Kugeln in der plastischen Phase nicht bzw. selten durch Stöße miteinander wechselwirken und der Bewegungsablauf jeder Kugel gleich ist, kann repräsentativ für das Zusammenwirken aller Kugeln das Verhalten einer einzelnen Kugel betrachtet werden. Unter der Annahme einer reibungsfreien Rollbewegung der Kugel erwarten wir in dem Histogramm der Geschwindigkeiten zwei Maxima bei  $\pm 5/7 v_{S,\text{max}} = \pm 9,51$  cm/s mit senkrecht abfallenden Flanken, wenn die Am-

plitude  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz beträgt (Abb. 4.29 (theor.)). Die Maxima der experimentell bestimmten Geschwindigkeitsverteilung der plastischen Phase (Abb. 4.29 (exp.)) liegen jedoch mit  $v_1 = -8,36$  cm/s und  $v_2 = 8,39$  cm/s bei Werten, deren Beträge im Mittel um 12 % kleiner sind als für eine reibungsfrei rollende Kugel zu erwarten und mittels der modifizierten Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\text{mod,exp}}$  dargestellt ist. Daraus kann geschlossen werden, dass die Rollreibung der Kugeln in diesem System nicht vernachlässigbar ist, sondern das Verhalten der Kugeln mitbestimmt. Zum anderen können auch die seltenen Stöße der Kugeln untereinander und mit dem Rand der Schale in der plastischen Phase nicht vernachlässigt werden. Auch das Auftreten von Geschwindigkeiten kleiner als  $v_1 = -8,36$  cm/s bzw. größer als  $v_2 = 8,39$  cm/s, also das unerwartete Verhalten der Flanken in der experimentellen Verteilung, lässt sich durch vereinzelt vorkommende Stöße der Kugeln untereinander und mit dem Rand der Schale erklären. Obwohl die Stöße stets inelastisch sind, kann eine Kugel durch einen Stoß mit einer weiteren Kugel oder dem Rand der Schale den Betrag ihrer Geschwindigkeit erhöhen.

Eine Erhöhung der Füllichte auf  $\mu = 0,57$  bei gleicher Fläche der Schale bedeutet, dass die mittlere freie Weglänge der Kugeln reduziert wird. Dies führt zu einer Erhöhung der Stoßfrequenz der Kugeln untereinander und mit dem Rand der Schale, wodurch wiederum mehr Energie der Kugeln dissipiert wird. In der fluidartigen Phase ist daher eine erhöhte Wahrscheinlichkeitsdichte für kleine Geschwindigkeitsbeträge auf Kosten einer Verringerung des durchschnittlichen Geschwindigkeitsbetrags der Kugeln zu verzeichnen (Abb. 4.22).

Auch beim Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase durch eine weitere Erhöhung der Füllichte  $\mu$  steigt die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten kleiner Geschwindigkeitsbeträge durch die erhöhte Stoßfrequenz der Kugeln und die damit verbundene Dissipation an Energie (Abb. 4.23). Im Zustand vollständiger Kristallisation ( $\mu = 0,8$ ) ist die Bewegungsfreiheit der Kugeln so gering, dass sich das daraus resultierende Wachstum an dissipierter Energie in einem Gewinn an Höhe und Schärfe des in der festkörperartigen Phase präsenten Maximums bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen äußert (vgl. Abb. 4.23 und 4.24).

## Die Rolle des Randes

In den bisherigen Ausführungen wurde dem Rand der Schale kein entscheidender Einfluss auf die Stoßfrequenz der Kugeln beigemessen. Im Folgenden wird die Vermutung diskutiert, dass die Anregung der Kugeln bei hohen Füllichten  $\mu$  hauptsächlich durch Stöße der Kugeln mit dem Schalenrand erfolgt. Demnach nimmt der Einfluss des Randes auf das Stoßverhalten der Kugeln bzw. auf ihre Geschwindigkeiten mit wachsender Füllichte  $\mu$  zu. Um diese Vermutung zu

belegen, sollte die Häufigkeit der Kugelstöße untereinander sowie mit dem Rand der Schale in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  untersucht werden. Diese Messung erfordert den Einsatz einer Hochgeschwindigkeitskamera oder die Auswertung eines durch Stöße hervorgerufenen Geräuschspektrums. Aus technischen Gründen konnten diese Messungen noch nicht durchgeführt werden und stellen eine Herausforderung für den Nachfolger dieses Versuchsaufbaus dar. Es soll jedoch der Gedankengang vollzogen werden, der zu dieser Vermutung führt:

Gegenüber der plastischen Phase clustern die Kugeln in der fluidartigen Phase und wechselwirken in regelmäßigen Zeitabständen mit dem Rand der Schale. Dabei wird der Kugelcluster bei jedem Randstoß komprimiert, die Packungsdichte der Kugeln in Randnähe lokal erhöht und ihre mittlere Bewegungsfreiheit reduziert. Dies wiederum führt dazu, dass die Kugeln vermehrt untereinander stoßen und Energie dissipiert wird. Der Einfluss des Randes der Schale verstärkt somit die zuvor beschriebene Tendenz der Kugeln, mit wachsender Füllichte bei gleicher Schalenfläche die Dissipation von Energie mittels inelastischer Stöße untereinander zu erhöhen. Andererseits erklärt das Wechselwirken der Kugeln mit dem Rand der Schale auch, dass die Kugeln in der fluidartigen Phase höhere Geschwindigkeitsbeträge als in der plastischen Phase annehmen können (vgl. Abb. 4.25): Wenn der Kugelcluster keinen Kontakt zu dem Rand der Schale hat, reguliert der Untergrund der Schale die Energiezufuhr der Kugeln. Durch zusätzliche Stöße der Kugeln mit dem Rand der Schale kann den Kugeln jedoch mehr Energie als einzig durch den Untergrund der Schale zugeführt werden.

In der festkörperartigen Phase und dem Zustand vollständiger Kristallisation stößt der Kugelcluster nicht nur in regelmäßigen Zeitabständen gegen den Rand der Schale, sondern hat dauerhaften Kontakt zu diesem. Während die geclusterten Kugeln in der fluidartigen Phase zwischen zwei Randstößen durch die Schale laufen, der oszillatorischen Bewegung des Untergrundes folgen und ihre Bewegungsfreiheit dabei erhöhen, bleiben sie in der festkörperartigen Phase dauerhaft komprimiert. Demnach besitzen sie in dieser Phase im zeitlichen Mittel eine geringere Bewegungsfreiheit als in der fluidartigen Phase. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit einer erhöhten Stoßfrequenz der Kugeln untereinander. In dem Histogramm der Kugelgeschwindigkeiten macht sich die damit verbundene Dissipation von Energie in der Ausbildung eines Maximums für kleine Geschwindigkeitsbeträge bemerkbar (vgl. Abb. 4.23). Demnach scheint die Ausbildung eines zentralen Maximums bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen in den Verteilungen mit dem Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase verknüpft zu sein.

Es lässt sich Folgendes festhalten: Während der Einfluss des Randes auf das Verhalten der Kugeln in der plastischen Phase vernachlässigbar gering scheint, wird der Energiegehalt der Kugeln in der fluidartigen Phase sowohl von dem Untergrund als auch von dem Rand der Schale bestimmt. In der festkörperartigen

Phase bzw. in dem Zustand vollständiger Kristallisation scheint das Verhalten der Kugeln einzig durch den Rand der Schale bestimmt zu sein. Diese Überlegungen stützen die These, dass sich der Einfluss des Schalenrandes bezüglich der Energiezufuhr der Kugeln mit wachsender Füllichte  $\mu$  steigert.

Im folgenden Unterabschnitt wird der Zusammenhang zwischen der zuvor beschriebenen Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  mit dem in Unterabschnitt 4.1.5 beschriebenen Übergang von der fluidartigen Phase in die festkörperartige Phase untersucht.

### 4.2.3 Die Kristallisation der Kugeln

Die im vorangegangenen Unterabschnitt dargestellten Überlegungen zur Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte lassen vermuten, dass diese den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase beschreibt. Um diesen Zusammenhang zu untersuchen, wird die Füllichte  $\mu_{c,v}$  ermittelt, bei welcher der zuvor beschriebene Übergang in der Topologie der Geschwindigkeitsverteilungen stattfindet. Dazu wird ein Polynom vierter Ordnung der Form

$$y = p_1 + p_2x^2 + p_3x^4 \quad (4.24)$$

an die Daten der Geschwindigkeitsverteilungen angepasst.  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  sind die zu betrachtenden Fitparameter. Die Terme ungerader Ordnung werden nicht berücksichtigt, um der bei auskonvergierten Verteilungen erwarteten Symmetrie um Null gerecht zu werden.

Der Übergang von zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu einem Maximum bei  $v = 0$  cm/s ist gleichbedeutend mit dem Übergang eines zentralen Minimums der Verteilung zu einem Maximum. Um diesen Übergang zu untersuchen, reicht zwar die Anpassung einer Parabel der Form  $y = p_1 + p_2x^2$  an den entsprechenden Bereich der experimentellen Daten, jedoch soll hier die Entwicklung der gesamten Topologie aller Verteilungen berücksichtigt werden.

Ableiten der Fitfunktion 4.24 nach der Abzisse  $x$  liefert

$$\frac{dy}{dx} = 2p_2x + 4p_3x^3. \quad (4.25)$$

Gesucht ist nun der Übergang von drei Lösungen zu einer Lösung der Gleichung

$$2p_2x + 4p_3x^3 = 0. \quad (4.26)$$

Im Falle kleiner Füllichten  $\mu$  lauten die drei Lösungen dieser Gleichung:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{-p_2}{2p_3}}. \quad (4.27)$$

Dabei beschreiben  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die Abstände der Funktionswerte von 4.24 mit Steigung Null zum Nullpunkt. Aufgrund der Topologie der experimentellen Verteilungen ist  $p_3$  stets negativ. Der Parameter  $p_2$  wechselt jedoch sein Vorzeichen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$ . Für kleine Füllichten, bei denen die Verteilungen ein zentrales Minimum zeigen, ist  $p_2$  positiv. Zeigt die Verteilung bei hohen Füllichten  $\mu$  jedoch ein Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen, so ist  $p_2$  negativ. Dieser Vorzeichenwechsel beschreibt den Übergang von drei Lösungen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  zu einer Lösung  $x_1$  bzw. den Übergang von einem zentralen Minimum zu einem Maximum. Die entsprechende Füllichte zu  $p_2 = 0$  ist die gesuchte Füllichte  $\mu_{c,v}$ , die mit der kritischen Füllichte  $\mu_{c1}$  für den Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase verglichen werden soll.

Die durchgeführte Anpassung der Fitfunktion an die experimentellen Daten erfolgt nach der Levenberg-Marquard-Methode (Press et al. 1992). Um die Fitfunktion 4.24 an die Daten anzupassen, muss zunächst die Anzahl der Datenpunkte festgelegt werden, die zur Bestimmung der Fitparameter  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  herangezogen werden. Dazu wird die quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit der Anzahl der Datenpunkte, an die die Fitfunktion angepasst wird, bestimmt. Die betrachteten Geschwindigkeitsverteilungen sind unter Vernachlässigung experimentell bedingter Abweichungen spiegelsymmetrisch zu Null. Daher werden die Datenpunkte, die zur Bestimmung von  $\chi^2$  verwendet werden, stets so gewählt, dass die Geschwindigkeit  $v = 0$  cm/s im Zentrum der ausgewählten Datenpunkte liegt. Abbildung 4.30 (a)-(d) zeigt die Werte für  $\chi^2$  in Abhängigkeit der Anzahl an Datenpunkten, die zur Anpassung der Fitfunktion herangezogen werden. Da sich die Topologie der verschiedenen Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  stark ändert, wird der jeweilige Fitbereich für jede betrachtete Füllichte  $\mu$  einzeln bestimmt.

Die Anzahl der Datenpunkte für die Anpassung der Fitfunktion 4.24 an die experimentellen Daten wird so gewählt, dass die quadratische Abweichung  $\chi^2$  möglichst klein, die Anzahl der Datenpunkte, an die die Fitfunktion angepasst wird, gleichzeitig aber möglichst hoch ist. Abbildung 4.30 kann entnommen werden, dass sich die Anzahl der verwendeten Datenpunkte in der plastischen Phase zu 31 Datenpunkten (Abb. 4.30 (a)), in der fluidartigen Phase zu 39 Datenpunkten (Abb. 4.30 (b)), in der festkörperartigen Phase zu 19 Datenpunkten (Abb. 4.30 (c)) und im Zustand vollständiger Kristallisation zu sieben Datenpunkten (Abb. 4.30 (d)) bestimmt. Die Anpassungen der Fitfunktion 4.24 (-) an die experimentellen Daten (o) sind in Abbildung 4.31 (a)-(d) dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass zur Bestimmung der kritischen Füllichte  $\mu_{c,v}$  für den Vorzeichenwechsel von  $p_2$  eine gute Übereinstimmung der Fitfunktion mit der gesamten experimentellen Verteilung nicht notwendig ist. Das Augenmerk liegt auf dem jeweils zentralen Bereich der Verteilungen.

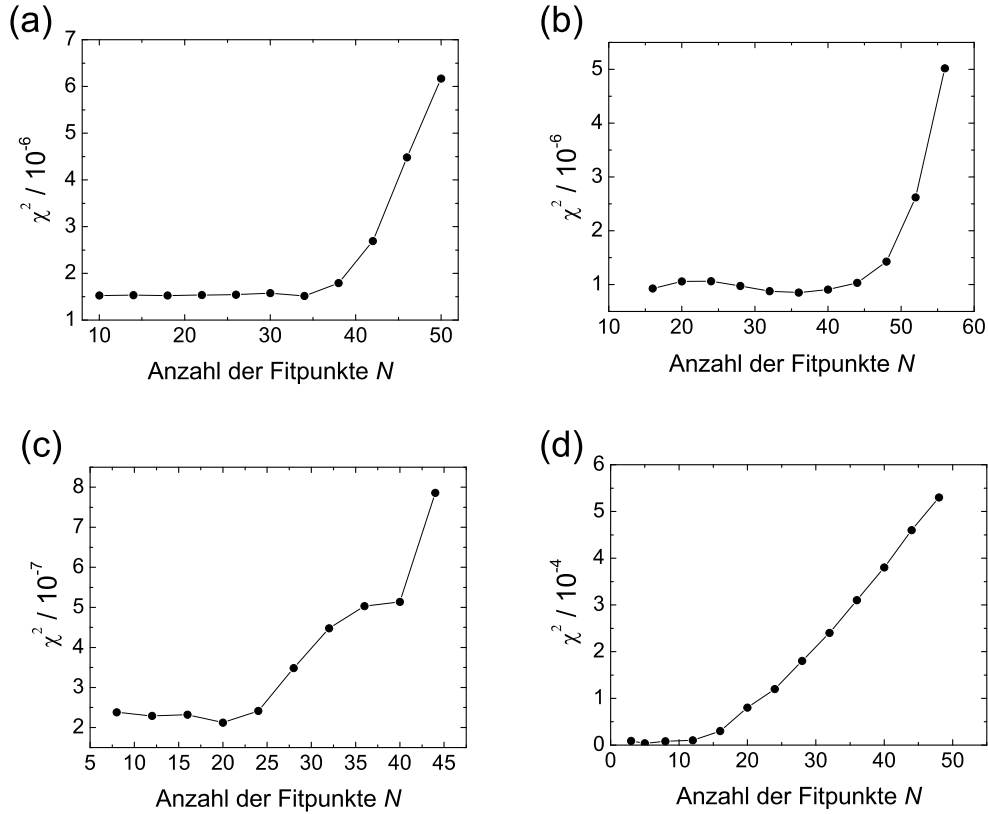


Abbildung 4.30: Quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit der Anzahl an Datenpunkten, die zur Anpassung der Fitfunktion 4.24 an die experimentellen Daten der Geschwindigkeitsverteilungen herangezogen werden. (a) plastische Phase ( $\mu = 0,4$ ), (b) fluidartige Phase ( $\mu = 0,57$ ), (c) festkörperartige Phase ( $\mu = 0,7$ ) und (d) Zustand vollständiger Kristallisation ( $\mu = 0,8$ ).

Für die verschiedenen Geschwindigkeitsverteilungen ergibt sich jeweils ein Wert für den Fitparameter  $p_2$  der Fitfunktion 4.24. In Abbildung 4.32 ist dieser in Abhängigkeit der Fülldichte  $\mu$  aufgetragen ( $\circ$ ). Zur Bestimmung der entsprechenden kritischen Fülldichte  $\mu_{c,v}$  für den Vorzeichenwechsel des Fitparameters  $p_2$  wird eine weitere Fitfunktion an die so erhaltenen vier Datenpunkte angepasst. Um ein mathematisch sinnvolles Modell an die Datenpunkte anzupassen, werden folgende Gedanken vorgestellt:

- Bei Fülldichten  $\mu$  mit  $\mu < \mu_{pf}$  bzw.  $\mu < \mu_{fp}$  befindet sich das System in der plastischen Phase. Da die Kugeln in dieser Phase unabhängig voneinander eine identische Bewegungsform zeigen (vgl. Unterabschn. 4.1.1), ist die Topologie der Geschwindigkeitsverteilungen in diesem Bereich durch das Verhalten einer einzelnen Kugel gegeben. Daher erwarten wir auch für Fülldichten  $\mu$  mit  $\mu < 0,4$ , dass sich im Rahmen experimenteller Genauigkeit die



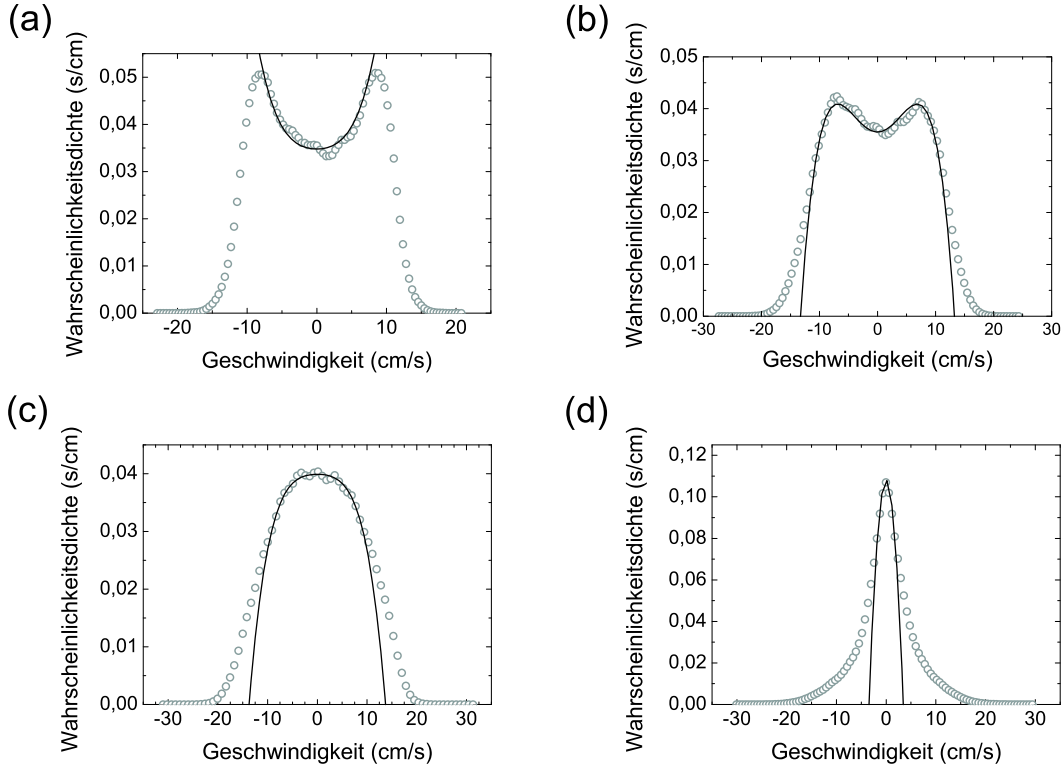


Abbildung 4.31: Anpassung der Fitfunktion 4.24 (-) an die experimentellen Daten (o) für die Fülldichten (a)  $\mu = 0,4$ , (b)  $\mu = 0,57$ , (c)  $\mu = 0,7$  und (d)  $\mu = 0,8$ . Die Anzahl an Datenpunkten der jeweiligen Verteilung, an die die Fitfunktion 4.24 angepasst wird, wird wie zuvor beschrieben bestimmt.

gleiche Verteilung der Geschwindigkeiten einstellt, wie in Abbildung 4.21 gezeigt. Dies wiederum bedeutet, dass der Fitparameter  $p_2$  bei allen Füll-dichten  $\mu$  mit  $\mu < \mu_{pf}$  bzw.  $\mu < \mu_{fp}$  den gleichen Wert hat bzw. geringfügig um einen Mittelwert schwankt.

- Wie in Unterabschnitt 4.1.6 beschrieben, gibt es eine maximale Füll-dichte  $\mu_{c2}(A)$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ , bei der die Kugeln in der Schale vollständig kristallisiert sind, also möglichst dicht in einer hexagonalen Struktur gepackt sind. Eine Approximation zu  $A = 0$  liefert die maximale Füll-dichte  $\mu_{\max} = \mu_{c2}(A = 0)$ , die in der Schale realisiert werden kann. Sie beträgt  $\mu_{c2}(A = 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,91$ . Für wachsende Füll-dichten  $\mu$  mit  $\mu > \mu_{c2}(A = 1,27)$  erwarten wir ein immer schärfer werdendes Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen in den entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen. Ist die maximale Füll-dichte  $\mu_{\max} = 0,91$  eingestellt, so haben die Kugeln in der Schale keine Bewegungsfreiheit mehr. Eine Analyse der Kugelgeschwindigkeiten im mitbewegten System der Schale liefert

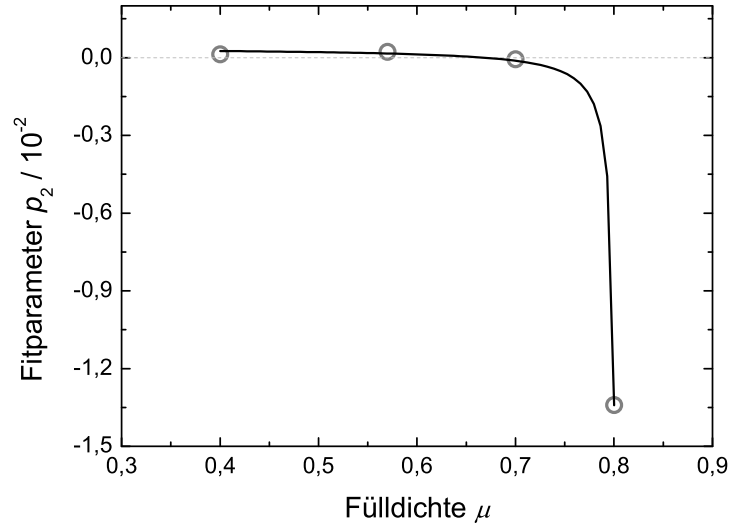


Abbildung 4.32: Wert des Fitparameters  $p_2$  in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  ( $\circ$ ) und Anpassung der Fitfunktion 4.28 (-).

dann eine  $\delta$ -Verteilung bei  $v = 0$  cm/s, was gleichbedeutend mit der Divergenz des Fitparameters  $p_2$  ist.

Diese Überlegungen führen zu der Annahme, den Verlauf von  $p_2$  in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  durch eine Funktion der Form

$$p_2(\mu) = a_1 + \frac{a_2}{\mu - a_3} \quad (4.28)$$

beschreiben zu können, wobei  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  die Fitparameter der Fitfunktion 4.28 sind. Die Anpassung der Fitfunktion 4.28 an die zuvor bestimmten vier Datenpunkte von  $p_2$  erfolgt wiederum nach der Levenberg-Marquard-Methode (Press et al. 1992). Die Fitparameter werden zu  $a_1 = 3,9 \cdot 10^{-4} \pm 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $a_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-5}$  und  $a_3 = 0,8 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$  bestimmt. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abbildung 4.32 zu sehen.

Mit den so bestimmten Werten der Fitparameter  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  hat die Fitfunktion 4.28 eine Polstelle bei  $\mu = 0,8$ . An dieser Stelle divergiert  $p_2(\mu)$ , d. h. die entsprechende Geschwindigkeitsverteilung zeigt eine  $\delta$ -Verteilung bei  $v = 0$  cm/s. Dieser Wert ist um etwa 11 % kleiner als der zu erwartende Wert von  $\mu_{\max} = 0,91$ , wenn die Schale unter Annahme der hexagonal dichtesten Kugelpackung vollständig mit Kugeln gefüllt ist. Weiterhin ist er um 3,5 % größer als der in Unterabschnitt 4.1.5 vorgestellte Wert  $\mu_{\text{tcp}}$  für die Zufalls-Packungsdichte. Die Abwei-

chung von der hexagonal dichtesten Kugelpackung ist dadurch zu erklären, dass sich die Kugeln zwar lokal in der hexagonal dichtesten Kugelpackung anordnen, diese Struktur aber durch Korngrenzen und Defekte aufgebrochen wird. Außerdem weichen die Kugeln am Rand des Clusters, also in Nähe des Randes der Schale, geringfügig von dieser Struktur ab. Daher können sich die Kugeln schon bei Füllichten  $\mu$  mit  $\mu < \mu_{\max}$  so anordnen, dass sie keine Bewegungsfreiheit mehr haben und somit keine Bewegung relativ zu der oszillierenden Schale ausüben können.

Die kritische Füllichte  $\mu_{c,v}$  für den Übergang von zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima mit eingeschlossenem Minimum zu einem Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen berechnet sich demnach zu

$$\mu_{c,v} = -\frac{a_2}{a_1} + a_3 = 0,675 \pm 0,003. \quad (4.29)$$

Ein Vergleich mit der kritischen Füllichte  $\mu_{c1} = 0,678 \pm 0,004$  für den Übergang von der fluidartigen Phase in die festkörperartige Phase bei der Amplitude  $A = 1,27$  cm (vgl. Unterabschn. 4.1.5) zeigt, dass die Werte nahezu identisch sind. Somit kann der Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zusätzlich zu der in Unterabschnitt 4.1.5 beschriebenen Methode auch anhand der Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  bestimmt werden.

### 4.3 Segregation – Der horizontale Paranusseffekt

Segregationseffekte in granularen Mischungen sind von wesentlicher Bedeutung für Physiker (z. B. Kudrolli (2004)) und Ingenieure (z. B. Williams (1976)). Segregationsphänomene unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation, bei denen sich die größeren Teilchen oberhalb der kleineren Teilchen sammeln, werden am häufigsten untersucht. Für dieses Phänomen werden verschiedene Mechanismen propagiert (Shinbrot 2004). So berichten beispielsweise Knight et al. (1993) von einem durch Konvektion hervorgerufenen Entmischungsprozess von Teilchen unterschiedlicher Größe. Demgegenüber begründen Chowhan (1995a), Chowhan (1995b) und Luding et al. (1996) das Aufsteigen der größeren Teilchen in einer Ansammlung von kleineren Teilchen mit einem Siebeffekt, der Filtration von kleineren Teilchen durch die Lücken der größeren Teilchen. Rosato et al. (1987), Jullien et al. (1992), Duran et al. (1993) und Cooke et al. (1996) hingegen führen das Argument der Brückenbildung an, wenn die kleineren Teilchen unter die durch vertikale Oszillation angehobenen größeren Teilchen rutschen und diese somit sukzessiv aufsteigen, bis sie die Oberfläche des Granulats erreicht haben. Ein weiterer

Mechanismus ist die von Hong et al. (2001) beschriebene Kondensation und das damit verbundene Absinken der Teilchen einer Sorte in einer binären Mischung.

Diese Segregationsphänomene, bei denen die größeren Teilchen eines binären Gemisches unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation aufsteigen, werden als *Paranusseffekt* bezeichnet (Rosato et al. 1987). Überraschenderweise beobachten Shinbrot & Muzzio (1998) jedoch, dass die größeren Teilchen in Abhängigkeit ihrer Dichte auch zum Boden des Gefäßes, in dem sich das zu betrachtende Granulat befindet, sinken können. Dieses Phänomen wird als *umgekehrter Paranusseffekt* bezeichnet und ist der Auslöser eines noch bis heute andauernden Studiums der Bedingungen, unter denen der Paranusseffekt oder dessen Umkehrung auftritt. Dazu werden sowohl theoretische, wie bei Hong et al. (2001) und Trujillo et al. (2003), als auch experimentelle Untersuchungen, wie bei Breu et al. (2003) und Huerta & Ruiz-Suárez (2004a) bzw. Huerta & Ruiz-Suárez (2004b), durchgeführt.

Zur theoretischen Beschreibung des Übergangs vom Paranusseffekt zum umgekehrten Paranusseffekt wählen Hong et al. (2001) einen Ansatz mittels der kinetischen Gastheorie. Sie betrachten die granulare Temperatur  $T_G$  der Teilchen, die entsprechend der Temperatur in der kinetischen Gastheorie über die kinetische Energie der Teilchen definiert ist:

$$T_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{v}_i - \langle \vec{v} \rangle)^2 \quad \text{mit} \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i. \quad (4.30)$$

Dabei wird die Geschwindigkeit des  $i$ -ten Teilchens mit  $\vec{v}_i$ , die Masse mit  $m_i$  und die Anzahl der betrachteten Teilchen mit  $N$  bezeichnet. In Abhängigkeit der Teilchenmasse und ihrer Größe wird eine kritische Temperatur bestimmt, bei deren Unterschreitung eine Ansammlung von monodispersen Kugeln im Schwerfeld der Erde kondensiert. Die unterschiedlichen kritischen Temperaturen in Abhängigkeit der betrachteten Teilchensorten einer binären Mischung führen zum Paranusseffekt bzw. zum umgekehrten Paranusseffekt. Mit diesem Ansatz hängt das Auftreten des jeweiligen Effektes nur noch von dem Dichte- und dem Durchmesser Verhältnis der betrachteten binären Teilchenmischung ab. Ist das Durchmesser Verhältnis von den großen zu den kleinen Teilchen kleiner als das entsprechende inverse Dichteverhältnis, so wird der Paranusseffekt erwartet. Andernfalls erwartet man den umgekehrten Paranusseffekt. Diese analytische Betrachtung für das Auftreten beider Effekte wird von den Autoren durch einen Vergleich mit einer molekulardynamischen Simulation bestätigt. Bei dieser Theorie ist jedoch zu beachten, dass sie auf der Annahme gleicher Füllhöhen beider Teilchensorten in dem Behälter beruht. Sie erklärt demnach nicht das Migrationsverhalten eines einzelnen Fremdkörpers, der sich in Größe und/oder Dichte von den anderen Kugeln eines binären Teilchengemisches unterscheidet.

Eine experimentelle Bestätigung dieser Ergebnisse erfolgt von Breu et al. (2003). Ihre Ergebnisse entsprechen weitestgehend denen von Hong et al. (2001)

durch analytische Berechnungen und numerische Simulationen vorhergesagten Bedingungen für das Auftreten des Paranusseffektes bzw. des umgekehrten Paranusseffektes. Huerta & Ruiz-Suárez (2004a) bzw. Huerta & Ruiz-Suárez (2004b) können diese Ergebnisse ebenfalls experimentell bestätigen, wenn die anregende Frequenz klein ist (5 Hz). Für hohe Frequenzen (50 Hz) weichen die Ergebnisse bezüglich der Abhängigkeit von Dichte- und Durchmesser Verhältnis ab. In diesem Fall verhalten sich die Kugeln entsprechend dem Prinzip des Auftriebs in Abhängigkeit ihrer Dichte. Numerisch wird dies bereits von Shishodia & Wassgreen (2001) für ein zweidimensionales System gezeigt.

Zusätzlich zu den Systemen vertikaler Oszillation wird in den letzten Jahren vermehrt auch das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation untersucht. Aumaître et al. (2001) und Aumaître et al. (2003) beschreiben zwei Segregationsprozesse in Abhängigkeit des Durchmesser Verhältnisses zweier Teilchensorten. Sowohl Scheiben als auch Kugeln, umgeben von einer Monolage kleinerer Kugeln, entmischen sich unter dem Einfluss einer horizontal kreisförmigen Oszillation. Die Teilchen werden in eine runde Schale mit ebenem Untergrund gegeben. In Abhängigkeit der Amplitude und der Füllichte migrieren die größeren Teilchen in Richtung des Schalenzentrums. Demgegenüber beobachten Reis & Mullin (2003) und Reis et al. (2004) Segregation unterschiedlich großer Teilchen in Form von Streifenbildung senkrecht zur horizontal linearen Oszillation eines rechteckigen Behälters. Weiterhin sind Segregationsphänomene auch in granularen Schüttungen, wie bei Lawinenabgängen und in rotierenden Trommeln zu beobachten, was beispielsweise von Félix & Thomas (2004) untersucht wird. Sie finden zwei Segregationseffekte in einer halb gefüllten, rotierenden Trommel. In Abhängigkeit des Durchmesser- und Dichteverhältnisses migrieren die größeren Teilchen einer binären Mischung zum Rand oder in Richtung der Drehachse der rotierenden Trommel. Je höher die Dichte der größeren Kugeln, desto näher kommen sie der Drehachse. Die leichten Kugeln migrieren zum Rand der Trommel. Eine umfassende Übersicht über granulare Segregationsphänomene bietet Kudrolli (2004).

### 4.3.1 Die Effekte

In diesem Unterabschnitt werden zwei Transporteffekte vorgestellt, die starke Ähnlichkeit zu dem Paranusseffekt und dem umgekehrten Paranusseffekt zeigen. Unter Verwendung der in Tabelle 3.1 aufgelisteten Kugelsorten wird die gerichtete Migration eines Fremdkörpers in einer Monolage von Kugeln untersucht. Dabei ist der Fremdkörper stets eine Kugel, die sich in Größe und/oder Dichte von den anderen Kugeln unterscheidet. Es können zwei unterschiedliche Migrationseffekte beobachtet werden, die Migration eines Fremdkörpers in Richtung des Schalenzentrums und die in Richtung des Schalenrandes. Obwohl die gerichtete Migration einer einzelnen Kugel ein Transportphänomen ist, werden diese Effekte im Kon-

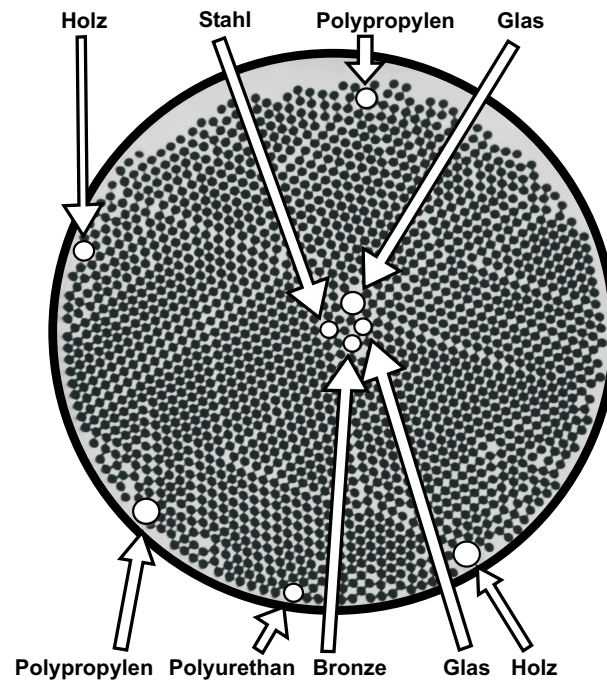


Abbildung 4.33: Momentaufnahme von 1600 Glaskugeln des Typs 3 ( $\mu = 0,68$ ,  $d = 0,6$  cm). Nach einigen Minuten unter dem Einfluss einer horizontal kreisförmigen Oszillation migrieren neun ausgewählte Kugelsorten unterschiedlicher Dichte und Größe entweder in das Zentrum der Schale oder an ihren Rand. Diese Kugeln haben stets einen größeren Durchmesser und/oder eine höhere Dichte als die sie umgebenden Glaskugeln (Typ 5-6, Typ 11-14, Typ 16 und Typ 20-21) und sind zur besseren Darstellbarkeit weiß markiert. Die Amplitude beträgt  $A = 1,91$  cm.

text der Segregation binärer Teilchengemische diskutiert. So können diese Effekte mit der gerichteten Bewegung der Fremdkörper beim Paranusseffekt und seiner Umkehrung verglichen werden. In Abbildung 4.33 sind beide Effekte für einige ausgewählte Kugelsorten dargestellt. Für diese Abbildung wurde – im Gegensatz zu den anderen hier vorgestellten Untersuchungen – das Transportverhalten von neun Fremdkörpern betrachtet, um die Ähnlichkeit zum Paranusseffekt und seiner Umkehrung darzustellen (vgl. Abb. 1.4).

Die Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalenrandes bezeichnen wir als *horizontalen Paranusseffekt*, die Migration zum Schalenzentrum wird als *umgekehrter horizontaler Paranusseffekt* bezeichnet. Die Namensgebung erfolgt aufgrund der Analogien zum Paranusseffekt und seiner Umkehrung. Beim Paranusseffekt sammeln sich die Fremdkörper auf der Oberfläche der kleineren Kugeln. Bei dem umgekehrten Effekt migrieren sie zum Boden des oszillierenden Behälters. Während die kleineren Kugeln an der Oberfläche teilweise fluidisiert sind, sind sie am Boden des Behälters relativ dicht gepackt und weisen somit lo-

kal eine höhere Packungsdichte auf. Dem entspricht die Anordnung der kleineren Kugeln am Rand und im Zentrum der horizontal zirkular oszillierenden Schale (vgl. Abb. 4.33). Sowohl beim “normalen” als auch horizontalen Paranusseffekt migrieren die Fremdkörper in Bereiche geringer Packungsdichte, während sie bei den umgekehrten Effekten in Gebiete hoher Dichte gedrängt werden.

Um die angesprochenen Migrationsprozesse in diesem System zu untersuchen, wird die Schale zunächst mit einer Monolage identischer Glaskugeln gefüllt. Anschließend wird eine weitere Kugel hinzugegeben, die sich in Größe und/oder Dichte von den übrigen Kugeln unterscheidet. Diese Kugel wird zunächst mit einem Abstand von  $D/4$  vom Schalenzentrum in der Schale platziert. Dabei ist  $D$  der Durchmesser der Schale. Wenn die Oszillation gestartet wird, tendiert die Kugel dazu, entweder in Richtung des Randes oder zum Zentrum der Schale zu laufen. Nur in wenigen Fällen zeigt sie keinerlei Tendenz in eine bestimmte Richtung zu migrieren, sondern beschreibt eine zufällige Bewegung durch die Schale. Aufgrund der dadurch gewonnenen Erkenntnisse über die Bewegungsrichtung des Fremdkörpers in der Schale werden die Anfangsbedingungen für die Messungen folgendermaßen geändert: Die Kugeln mit der Tendenz, zum Zentrum der Schale zu migrieren, werden zu Beginn einer Messung am Schalenrand platziert, während die Kugeln, die zum Schalenrand migrieren, zu Beginn im Schalenzentrum positioniert werden. Nach dem Starten der Oszillation wird die Bewegung des Fremdkörpers durch das in Abschnitt 3.4 des vorherigen Kapitels beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Kugelkoordinaten in konstanten Zeitschritten von 0,05 s aufgezeichnet.

### 4.3.2 Ergebnisse

Der obere Teil der Abbildung 4.34 zeigt die zeitliche Entwicklung des radialen Abstands  $d_z$  einer Polypropylenkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 0,84$  g/cm<sup>3</sup>) vom Schalenzentrum. Weiter befinden sich 1500 Glaskugeln ( $\mu = 0,64$ ) mit einem Durchmesser von  $d = 0,6$  cm und einer Dichte von  $\rho = 2,56$  g/cm<sup>3</sup> in der Schale. Die Polypropylenkugel startet im Zentrum der Schale und zwingt sich durch die kleineren Kugeln in Richtung des Schalenrandes. Wenn sie diesen erreicht, verbleibt sie für den weiteren Verlauf der Messung in seiner Nähe. Die oszillatorische Bewegung der Kugel beruht auf der horizontal kreisförmigen Bewegung der Schale, die eine Zykloidenbahn der Kugeln induziert (Scherer et al. 2000).

Im Gegensatz dazu zeigt der untere Teil der Abbildung 4.34 den umgekehrten Effekt: Eine Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 7,69$  g/cm<sup>3</sup>), die anfangs in der Nähe des Schalenrandes platziert ist, wird in Richtung des Schalenzentrums getrieben. Folglich kann die Richtung der Fremdkörper-Migration durch eine Änderung der Dichte  $\rho$  dieser Kugel hervorgerufen werden. Dieses Verhalten ähnelt dem von Hong et al. (2001) und Breu et al. (2003) theoretisch bzw. experimentell un-

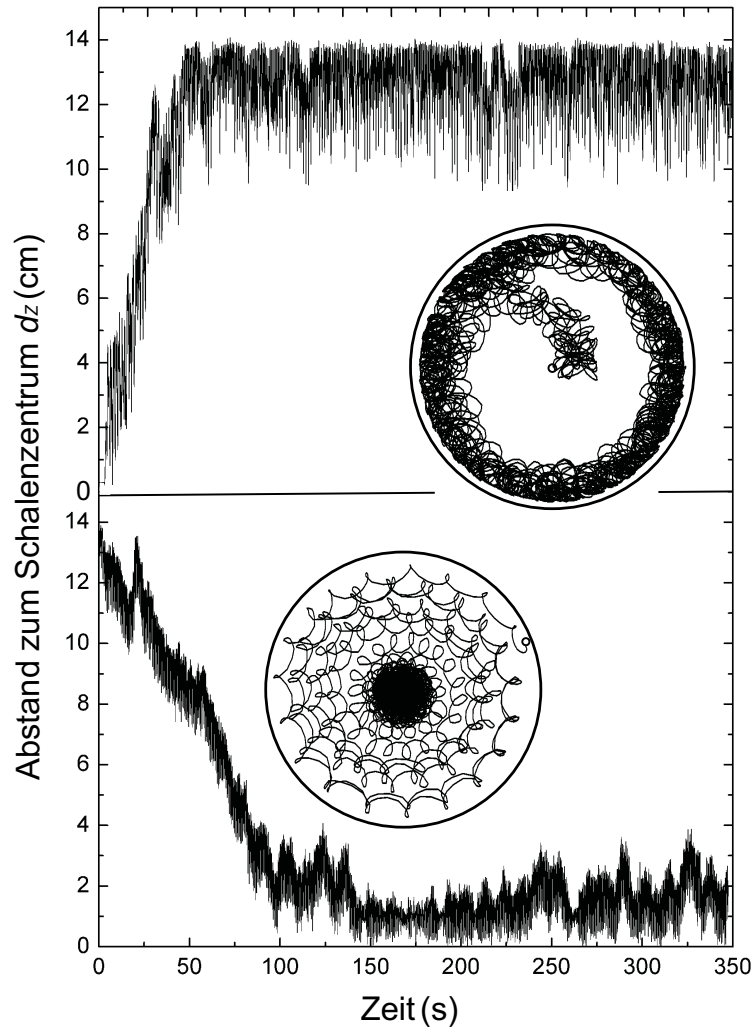


Abbildung 4.34: Abstand zum Schalenzentrum  $d_z$  des Fremdkörpers in Abhängigkeit der Zeit. Oben: Eine Polypropylenkugel des Typs 13 ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 0,84$  g/cm<sup>3</sup>) umgeben von 1500 Glaskugeln des Typs 3 ( $\mu = 0,64$ ,  $d = 0,6$  cm,  $\rho = 2,56$  g/cm<sup>3</sup>) migriert zum Rand der Schale. Unten: Eine Stahlkugel des Typs 20 ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 7,69$  g/cm<sup>3</sup>) umgeben von 1800 Glaskugeln des Typs 3 ( $\mu = 0,77$ ,  $d = 0,6$  cm,  $\rho = 2,56$  g/cm<sup>3</sup>) migriert zum Zentrum der Schale. Die beiden Insets zeigen die zugehörigen Pfade der Fremdkörper für die Bewegung durch die Schale. Die Amplitude beträgt  $A = 1,59$  cm (oben) bzw.  $A = 2,22$  cm (unten).



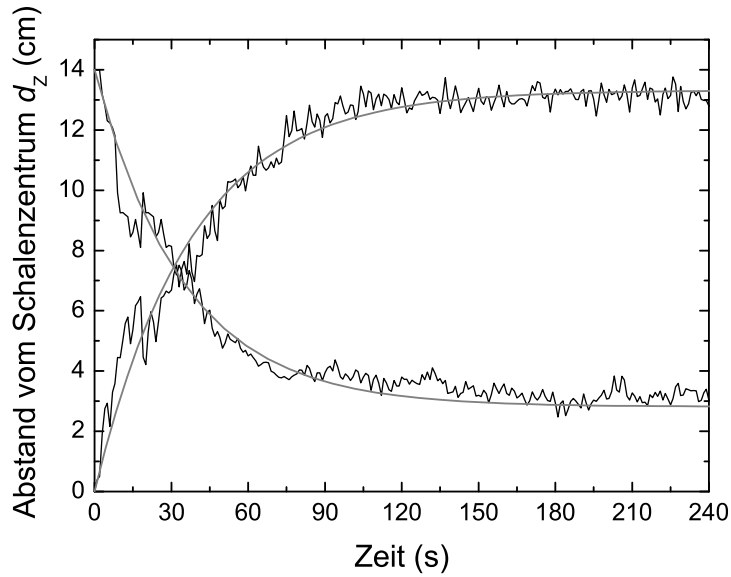


Abbildung 4.35: Gemittelter Abstand zum Schalenzentrum  $d_z$  zweier Fremdkörper in Abhängigkeit der Zeit. Dargestellt ist jeweils eine Mittelung über zehn Messungen für beide Migrationsrichtungen sowie die zugehörige Anpassung eines exponentiellen Fits. Die experimentellen Parameter entsprechen denen in Abbildung 4.34.

tersuchten Übergang vom Paranusseffekt zum umgekehrten Paranusseffekt unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation.

Es fällt auf, dass die oszillatorische Bewegung der Polypropylenkugel vom Schalenzentrum in Richtung des Randes (Abb. 4.34 oben) im Gegensatz zu der Stahlkugel auf dem Weg zum Schalenzentrum (Abb. 4.34 unten) deutlicher ausgeprägt ist, d. h. eine größere Amplitude hat. Die Füllichte  $\mu = 0,77$  der Kugeln des Typs 3 ( $d = 0,6$  cm) für die Messung mit der Stahlkugel (Abb. 4.34 unten) ist der festkörperartigen Phase zuzuordnen. Sie ist deutlich höher als  $\mu = 0,64$  für die Messung mit der Polypropylenkugel (Abb. 4.34 oben). Diese ist der fluidartigen Phase zuzuordnen. In der festkörperartigen Phase hat der Cluster weniger Bewegungsfreiraum in der Schale. Damit hat die oszillatorische Bewegung jeder Kugel dieses Clusters, und somit auch die der Stahlkugel, eine kleinere Amplitude als in der Messung mit der Polypropylenkugel bei geringerer Füllichte  $\mu$ .

Um zu überprüfen, ob die beobachteten Effekte reproduzierbar sind und um die Fluktuationen zu reduzieren, werden die Messungen zehnmal wiederholt. Abbildung 4.35 zeigt die zeitliche Entwicklung des radialen Abstands  $d_z$  der

Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 7,69$  g/cm<sup>3</sup>) und der Polypropylenkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 0,84$  g/cm<sup>3</sup>), gemittelt über je zehn Messungen. Die Fremdkörper sind jeweils von Glaskugeln des Typs 3 ( $d = 0,6$  cm,  $\rho = 2,56$  g/cm<sup>3</sup>) umgeben. Die experimentellen Parameter entsprechen denen in Abbildung 4.34. Um charakteristische Zeiten für die gezeigten Effekte zu erhalten, wird jeweils eine Exponentialfunktion der Form  $p_1 + (R^* - p_1) \cdot \exp(-t/t_{0,\text{Zentrum}})$  für die Migration in Richtung des Schalenzentrums und  $p_1 - p_1 \cdot \exp(-t/t_{0,\text{Rand}})$  für die Migration in Richtung des Schalenrandes an die experimentellen Daten angepasst. Dabei sind  $p_1$  und  $t_{0,\text{Zentrum}}$  bzw.  $t_{0,\text{Rand}}$  die entsprechenden Fitparameter.  $R^* = 14$  cm in der ersten Gleichung entspricht dem Schalenradius, vermindert um den Kugelradius der Stahlkugel. Auf diese Weise erhält man eine charakteristische Zeit  $t_{0,\text{Zentrum}} = (37,7 \pm 0,7)$  s für die Migration der Stahlkugel in Richtung des Schalenzentrums und  $t_{0,\text{Rand}} = (34,7 \pm 0,6)$  s für die Migration der Polypropylenkugel in Richtung des Schalenrandes.

Diese Transportphänomene sind jedoch nicht für beliebige Werte der Fülldichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  zu sehen. Unterschreitet die Fülldichte  $\mu$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  einen bestimmten Wert, kann keine gerichtete Migration eines Fremdkörpers beobachtet werden. Dies ist in Abbildung 4.36 zu sehen, in der die von 1400 Glaskugeln ( $\mu = 0,6$ ,  $d = 0,6$  cm) umgebene Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm) durch die Schale läuft, ohne jeglichen Trend einer gerichteten Migration zu zeigen.

Da das Auftreten der gezeigten Effekte von den zwei Parametern Fülldichte  $\mu$  und Amplitude  $A$  abhängig ist, wird diese Abhängigkeit weiter untersucht. Durch Variation der Fülldichte  $\mu$  für verschiedene Amplituden  $A$  kann der Phasenraum abgegrenzt werden, in dem die Migrationsprozesse stattfinden. Dazu wird die Fülldichte von  $\mu = 0,4$  bis  $\mu = 0,9$  für Amplituden  $A = 0,95$  cm bis  $A = 2,22$  cm variiert. Unterhalb dieses Amplitudenbereichs kann unabhängig von der eingestellten Fülldichte  $\mu$  kein Transport eines Fremdkörpers beobachtet werden. Für Amplituden  $A > 2,22$  cm ist die Existenz einer Monolage nicht länger gegeben. Abbildung 4.37 zeigt die beiden Bereiche, in denen Migration der Fremdkörper in Richtung des Schalenzentrums bzw. in Richtung des Schalenrandes zu beobachten ist. Die Migration einer Polypropylenkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 0,84$  g/cm<sup>3</sup>) in Richtung des Schalenrandes findet in dem Bereich zwischen den Quadraten (■) statt. Die Migration einer Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 7,69$  g/cm<sup>3</sup>) in Richtung des Schalenzentrums ist in dem Bereich zwischen den Kreisen (○) zu beobachten. Dabei entsprechen die jeweils unteren Datenpunkte der beiden Bereiche den kritischen Fülldichten für das Einsetzen des Fremdkörpertransports. Oberhalb der jeweils oberen Datenpunkte können keine Migrationsprozesse mehr beobachtet werden. Es wird darauf hingewiesen, dass diese Phasendiagramme nicht nur für Polypropylen und Stahl gültig sind. Alle in Abbildung 4.33 gezeigten Kugelsorten mit der gleichen Migrationsrichtung werden innerhalb der experimentellen Auflösung von diesen Phasendiagrammen charakterisiert. Eine Umkehrung

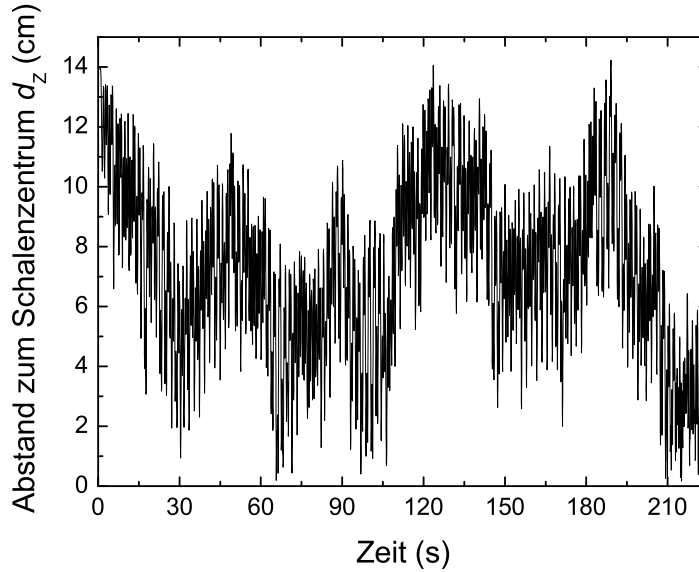


Abbildung 4.36: Abstand zum Schalenzentrum  $d_z$  in Abhängigkeit der Zeit für eine Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm), die von 1400 Glaskugeln ( $\mu = 0,6$ ,  $d = 0,6$  cm) umgeben ist. Eine gerichtete Migration der Stahlkugel ist nicht zu beobachten. Die Amplitude beträgt  $A = 1,91$  cm.

der Migrationsrichtung eines Fremdkörpers durch Variation der Amplitude  $A$  und/oder der Füllichte  $\mu$  ist dabei nicht möglich.

Bei beiden Transporteffekten sinkt die kritische Füllichte  $\mu_{\text{Rand,Start}}$  bzw.  $\mu_{\text{Zentrum,Start}}$  für den Beginn der Migration mit wachsender Amplitude  $A$ . Die kritischen Werte für die Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalenrandes (■) liegen für alle betrachteten Amplituden mit über 14 % deutlich unterhalb der Grenze für die Migration in Richtung des Schalenzentrums (○). Während die obere Grenze für den Bereich der Migration in Richtung des Schalenrandes auch mit wachsender Amplitude  $A$  sinkt, liegt die obere Grenze für den entgegengesetzten Effekt bei einem von der Amplitude  $A$  unabhängigen konstanten Wert von  $\mu_{\text{Zentrum,Ende}} = 0,86$ .

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Migrationsrichtung der Kugeln unterschiedlicher Größe und/oder Dichte von den inneren Parametern Kugeldurchmesser  $d$  und Dichte  $\rho$  für die in Tabelle 3.1 aufgeführten Kugeltypen getestet. Die Dichte der verwendeten Kugeln variiert von  $\rho = 0,65$  g/cm<sup>-3</sup> für Holz bis  $\rho = 8,9$  g/cm<sup>-3</sup> für Bronze für Kugelgrößen  $d = 0,2$  cm bis  $d = 2,2$  cm. Es wird das Verhalten von 60 verschiedenen Kombinationen für jeweils zwei unterschiedliche Kugeltypen betrachtet. Bei 31 Kombinationen wird Migration der

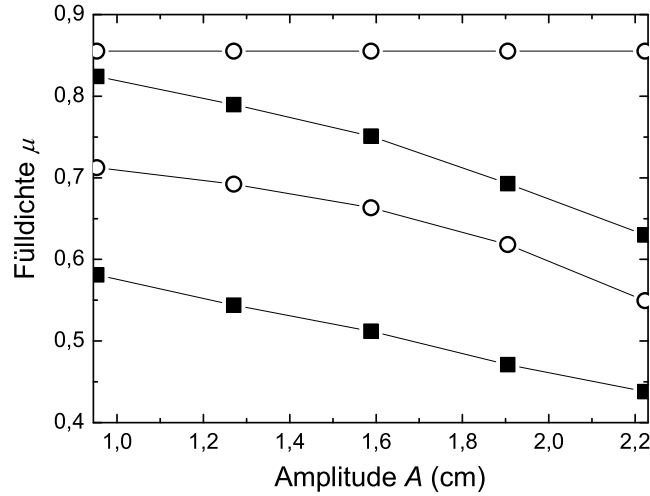


Abbildung 4.37: Kritische Fülldichten  $\mu_{\text{Rand,Start}}$  und  $\mu_{\text{Rand,Ende}}$  bzw.  $\mu_{\text{Zentrum,Start}}$  und  $\mu_{\text{Zentrum,Ende}}$  für das Auftreten der Migrationseffekte in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ . Migration einer Polypropylenkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 0,84$  g/cm<sup>3</sup>) in Richtung des Schalenrandes findet zwischen Quadraten (■) statt, Migration einer Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm,  $\rho = 7,69$  g/cm<sup>3</sup>) in Richtung des Schalenzentrums zwischen den Kreisen (○). Die den jeweiligen Fremdkörper umgebenden Glaskugeln haben einen Durchmesser von  $d = 0,6$  cm.

Kugel anderer Größe und/oder Dichte in Richtung des Randes beobachtet. In 22 Fällen migriert der Fremdkörper in Richtung des Schalenzentrums, und für sieben Fälle kann keine gerichtete Migration beobachtet werden. Ein Überblick über die Ergebnisse ist in Abbildung 4.38 unten dargestellt, in der die verschiedenen Migrationsbereiche in Abhängigkeit des Durchmesser- und Dichteverhältnisses von der jeweils größeren zu den kleineren Kugeln zu sehen sind. Es sind deutlich zwei getrennte Bereiche für beide Effekte zu erkennen. Die Kreise (○) beschreiben den Bereich der Fremdkörpermigration in Richtung des Schalenzentrums, die Quadrate (■) den in Richtung des Randes. Zum Vergleich ist das entsprechende Phasendiagramm für den vertikalen Paranusseffekt und seine Umkehrung in Abbildung 4.38 oben dargestellt.

### 4.3.3 Diskussion der Ergebnisse

An dieser Stelle werden die zur Fremdkörpermigration gezeigten Ergebnisse diskutiert. In Abbildung 4.34 fällt auf, dass die in Richtung des Schalenzentrums migrierende Stahlkugel einen mittleren Endabstand von  $d_Z = (1,42 \pm 0,7)$  cm zum

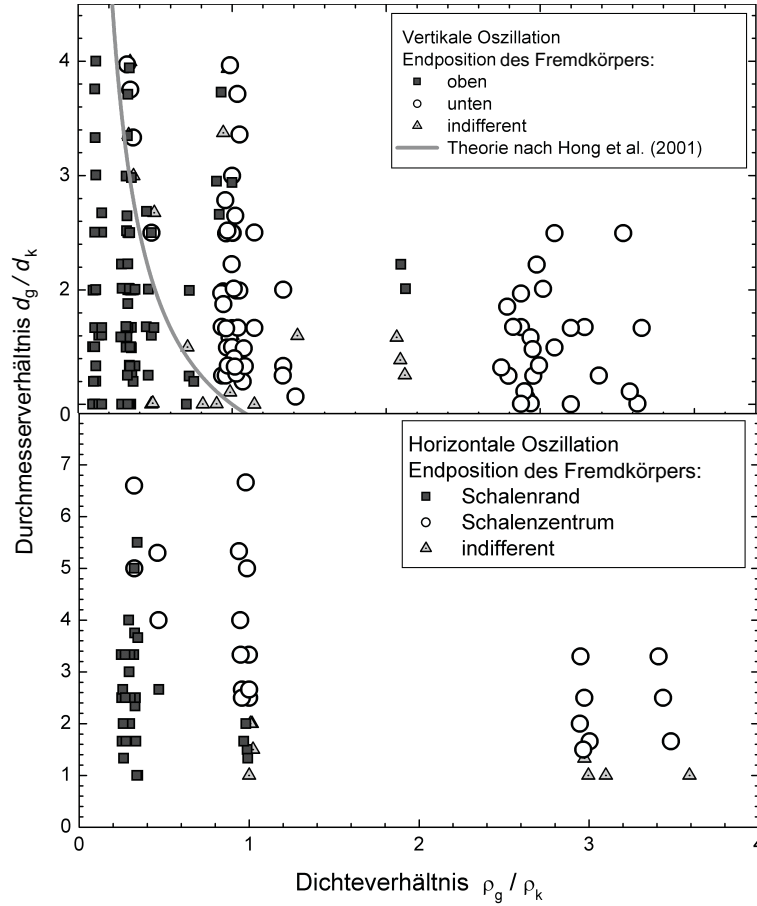


Abbildung 4.38: Phasendiagramm für die beiden Transporteffekte unter dem Einfluss einer vertikalen Oszillation (oben) und einer horizontal zirkularen Vibration (unten). Es werden die Bereiche gezeigt, in denen Migration nach unten bzw. in Richtung des Schalenzentrums (○) und nach oben bzw. in Richtung des Schalenrandes (■) in Abhängigkeit der Teilcheneigenschaften stattfindet. Der Bereich, in dem keine gerichtete Migration zu beobachten ist, ist mit hellgrauen Dreiecken gekennzeichnet. Jedes Symbol repräsentiert eine Messung. Für die horizontale Oszillation (unten) beträgt die Amplitude  $A = 1,91$  cm. Die Daten für die vertikale Oszillation sind von Breu et al. (2003) entnommen.

Schalenzentrum annimmt. Zur Bestimmung dieser Zahl werden die Abstände der Stahlkugel nach einer Zeit von 150 s berücksichtigt, weil nach Ablauf dieser Zeit der Transportprozess offensichtlich als abgeschlossen gelten kann. Unter Berücksichtigung zweier Annahmen ist dieser endliche Abstand zu verstehen. Zum einen nehmen wir an, dass die Stahlkugel nicht zum Zentrum der Schale, sondern zum Zentrum des Kugelclusters migriert, zum anderen betrachten wir den Kugelcluster als kreisförmig und hexagonal dicht gepackt. Die zweite Annahme ist insofern gerechtfertigt, als das System bei einer Füllichte von  $\mu = 0,77$  und einer Amplitude von  $A = 1,91$  cm vollständig kristallisiert ist (vgl. Unterabschn. 4.1.6) und somit bis auf Korngrenzen und Defektpunkte die hexagonal dichteste Kugelpackung annimmt. Eine kreisförmige Gestalt des Clusters ist aufgrund der Geometrie des Versuchsaufbaus gegeben. Der Radius des kreisförmigen Clusters der kleineren Kugeln berechnet sich zu

$$r_{\text{Cluster}} = \sqrt{N \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\pi}} = 13,36 \text{ cm} \quad (\text{vgl. Unterabschn. 4.1.6}), \quad (4.31)$$

wobei  $N = 1800$  die Anzahl der kleinen Kugeln mit Durchmesser  $d = 0,6$  cm bezeichnet. Verglichen mit dem Radius  $R = 14,5$  cm für die Schale ist das eine Differenz von 1,14 cm. Für die Stahlkugel, die im festkörperartigen Zustand des Systems ins Zentrum des Kugelclusters migriert, bedeutet dies, dass sie im Mittel auf einem Kreis mit einem Radius von 1,14 cm um das Schalenzentrum läuft, was mit dem gemessenen  $d_Z = (1,42 \pm 0,7)$  cm recht gut übereinstimmt.

In Abbildung 4.37 werden die unterschiedlichen Bereiche der Füllichte  $\mu$  und der Amplitude  $A$  dargestellt, in denen die beiden Transporteffekte auftreten. Wir betrachten zunächst den Bereich für die Migration eines Fremdkörpers in Richtung des Schalenrandes (■). Bei Erhöhung der Füllichte  $\mu$  fällt die Grenzlinie für das Einsetzen des Effektes mit dem Übergang der kleineren Kugeln ( $d = 0,6$  cm) von der plastischen in die fluidartige Phase zusammen. In der plastischen Phase, d. h. für geringere Füllichten  $\mu$ , ist keinerlei Migrationstrend eines Fremdkörpers zu beobachten. Sobald das System jedoch in die fluidartige Phase übergeht, scheint auch der Migrationseffekt für die zum Schalenrand wandernden Fremdkörper präsent zu sein. Diese Aussage wird aufgrund von Beobachtungen während der Messdurchführung getroffen, sie kann jedoch nicht durch eine Messung präzisiert werden. Aufgrund der in Abschnitt 3.4 des vorangegangenen Kapitels erläuterten Problematik der Positionsfindung kleiner Kugeln ( $d < 1$  cm) kann der sprunghafte Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase für die in diesem Abschnitt verwendeten Kugeln nicht vermessen werden.

Die obere Grenze für das Auftreten der Migration des Fremdkörpers zum Schalenrand stimmt mit der kritischen Füllichte für die vollständige Kristallisation der kleineren Kugeln überein. Da dieser Wert unabhängig von der verwendeten Kugelgröße analytisch bestimmt werden kann (vgl. Unterabschn. 4.1.6),

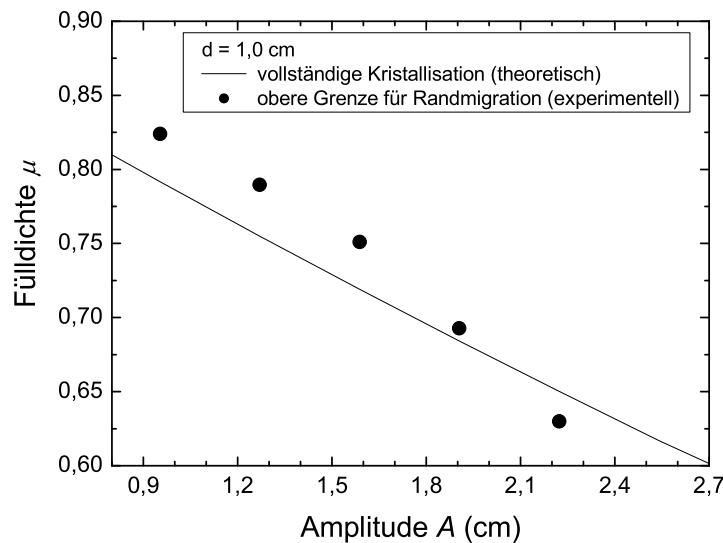


Abbildung 4.39: Vergleich zwischen dem theoretischen Wert der Füllichte  $\mu$  für die vollständige Kristallisation der Kugeln (-) und der oberen Grenze der Füllichte  $\mu$  für die Migration der größeren Kugeln in Richtung des Schalenrandes (•) in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ .

ist eine graphische Darstellung dieses Zusammenhangs möglich. Abbildung 4.39 zeigt den Vergleich zwischen dem Wert der Füllichte  $\mu$  für die vollständige Kristallisation der Kugeln und der oberen Grenze des Bereichs für die Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalenrandes. Es ist zu sehen, dass der Transport nicht länger präsent ist, wenn die kritische Füllichte für die vollständige Kristallisation der kleineren Kugeln um ein gewisses Maß überschritten wird. Lediglich ein Messpunkt bei  $A = 2,22$  cm liegt unterhalb der für die vollständige Kristallisation der Kugeln benötigten Füllichte  $\mu$ . Dieser Zusammenhang wird verständlich, wenn man bedenkt, dass sich die Kugeln nahezu in der hexagonal dichtesten Kugelpackung anordnen, sobald das System vollständig kristallisiert ist. Durch diese Anordnung der kleineren Kugeln werden größere Kugeln mit geringerer Dichte angehoben und aus der Monolage nach oben gedrückt. Eine weitere Messdurchführung ist in diesem Fall nicht sinnvoll bzw. nicht möglich.

Nun wird der Bereich aus Abbildung 4.37 betrachtet, der die Migration von Fremdkörpern in Richtung des Schalenzentrums begrenzt ( $\circ$ ). Die untere Grenzlinie für das Auftreten dieses Effektes scheint mit dem Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase verknüpft zu sein. Sobald das System in die festkörperartige Phase übergeht, kann Migration der Fremdkörper in Richtung

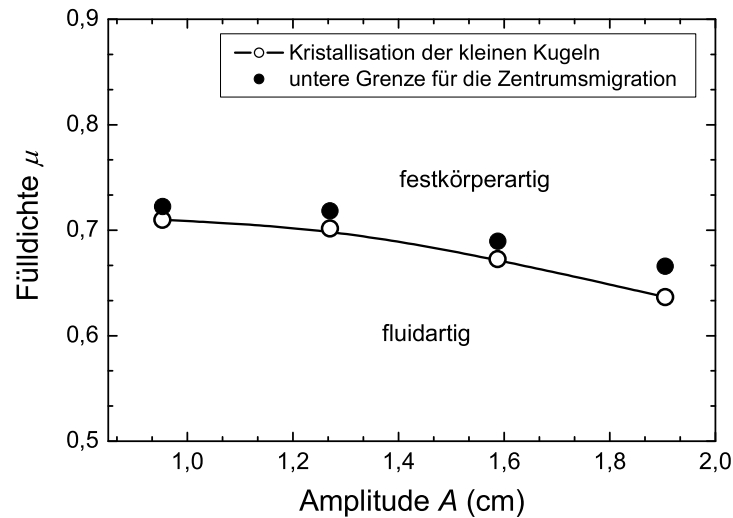


Abbildung 4.40: Vergleich zwischen dem Wert der Füllichte  $\mu$  für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase für Glaskugeln des Typs 2 ( $d = 0,4$  cm) und der unteren Grenze der Füllichte  $\mu$  für das Einsetzen der Migration einer Stahlkugel des Typs 20 ( $d = 1,0$  cm) in Richtung des Schalen-zentrums. Die kritischen Füllichten  $\mu$  sind in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  dargestellt.

des Schalen-zentrums beobachtet werden. Dabei werden die in Abbildung 4.33 dargestellten Kugeltypen betrachtet, die in Richtung des Schalen-zentrums laufen. Um den Zusammenhang zwischen dem Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase und der Migration der Fremdkörper in Richtung des Schalen-zentrums zu überprüfen, betrachten wir das Verhalten einer Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm), die von Glaskugeln ( $d = 0,4$  cm) umgeben ist. Abbildung 4.40 zeigt die kritische Füllichte der kleineren Kugeln für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase (vgl. Unterabschn. 4.1.5) in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  und die zugehörigen Punkte für das Einsetzen des Transporteffektes des Fremdkörpers. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Stahlkugel erst dann in Richtung des Schalen-zentrums migriert, wenn das System von der fluidartigen in die festkörperartige Phase übergegangen ist. Eine Betrachtung des Verhaltens für Amplituden  $A > 1,91$  cm ist bei Verwendung dieser Glaskugeln ( $d = 0,4$  cm) nicht möglich, da die Existenz der Monolage hier nicht mehr gegeben ist. Für kleinere als die hier dargestellten Amplituden kann weder der Phasenübergang noch die gerichtete Migration eines Fremdkörpers beobachtet werden.

Die obere Grenze der Migration in Richtung des Schalen-zentrums liegt un-



abhängig von der eingestellten Amplitude bei der Füllichte  $\mu = 0,86$ . Oberhalb davon zeigen die Kugeln in der nahezu vollständig gefüllten Schale fast keine Bewegung mehr, und Fremdkörpermigration kann nicht beobachtet werden. Der Wert  $\mu = 0,86$  ist um 7,5 % größer als der entsprechende in Unterabschnitt 4.2.3 bestimmte Wert für die Füllichte  $\mu$ . Weiterhin ist der Wert  $\mu = 0,86$  um 5,5 % kleiner als der Wert der hexagonal dichtesten Kugelpackung ( $\mu_{\text{hcp}} = 0,91$ ).

Eine Frequenzabhängigkeit für das Auftreten beider Transporteffekte konnte innerhalb des experimentell zugänglichen Bereichs ( $0,33 \text{ Hz} \leq \nu \leq 2,0 \text{ Hz}$ ) nicht gemessen werden. Es konnte lediglich eine Abhängigkeit der Zeitskalen für die Migrationseffekte beobachtet werden. Um diesen Bezug darzustellen, müssten noch weitere Experimente durchgeführt werden.

Das in Abbildung 4.38 unten gezeigte Phasendiagramm zeigt deutlich zwei unterschiedliche Bereiche für die beiden vorgestellten Transporteffekte in Abhängigkeit der Durchmesser- und Dichteverhältnisse zweier Kugelsorten. Auffällig ist die Ähnlichkeit bezüglich der Trennung beider Bereiche zu dem Phasendiagramm des vertikalen Paranusseffektes (Abb. 4.38 oben). Um eine genauere Aussage über eine Funktion für die Grenzlinie zwischen dem horizontalen Paranusseffekt und seiner Umkehrung machen zu können, werden zum einen mehrere Messpunkte, zum anderen eine theoretische Betrachtung dieser Effekte benötigt. Die von Hong et al. (2001) angeführten theoretischen Überlegungen für das Auftreten des Paranusseffektes bzw. des umgekehrten Paranusseffektes sind auf die Problematik der hier vorgestellten, horizontalen Effekte nicht anwendbar. Sowohl die Erdbeschleunigung  $g$  als auch gleiche Füllhöhen beider Teilchensorten sind in ihren Überlegungen relevante Parameter zur Beschreibung des Übergangs vom Paranusseffekt zum umgekehrten Paranusseffekt. In dem hier vorgestellten Fall der horizontalen Fremdkörpermigration ist die Gravitation jedoch nicht von Relevanz. Außerdem betrachten wir die Migration einer einzelnen Kugel, die sich in Größe und/oder Dichte von den anderen Kugeln unterscheidet.

Alle in Abbildung 4.38 gezeigten Messungen zum Transportverhalten der Fremdkörper wurden auch mit binären Kugelmischungen durchgeführt, in denen das Migrationsverhalten von bis zu 19 Fremdkörpern eines Typs beobachtet wurde. Wie bei den Messungen mit nur einer Kugel unterschieden sich auch diese Kugeln in Größe und/oder Dichte von den anderen Kugeln des binären Gemisches. Das Auftreten der beiden Migrationseffekte wurde dadurch nicht beeinflusst. Die Ergebnisse für ein binäres Gemisch aus Glaskugeln des Typs 2 und des Typs 5 werden in Aumaître et al. (2003) vorgestellt. Die Abhängigkeit der Effekte von dem Kugelanzahlverhältnis beider Sorten muss noch untersucht werden. Insbesondere stellt sich die Frage nach dem Verhalten der Kugeln, wenn die Füllmengen beider Kugelsorten übereinstimmen oder die Stoßfrequenz identischer Kugeln für beide Sorten gleich ist.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass wir die zeitliche Entwicklung des horizontalen Paranusseffektes eines Einzelteilchens und seiner Umkehrung quantitativ charakterisiert und im Vergleich zum vertikalen Paranusseffekt diskutiert haben. In Abhängigkeit der fünf Parameter Füllichte  $\mu$ , Amplitude  $A$ , Frequenz  $\nu$ , Durchmesser Verhältnis  $d_g/d_k$  und Dichteverhältnis  $\rho_g/\rho_k$  können drei Effekte beobachtet werden: Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalen-zentrums, Migration zum Schalenrand und eine ungerichtete Bewegung des Fremdkörpers in der Schale. Für konstante Werte der Füllichte  $\mu$ , der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  kann der Übergang von dem horizontalen Paranusseffekt zu dem umgekehrten horizontalen Paranusseffekt sowohl durch Variation des Durchmesser Verhältnisses als auch des Dichteverhältnisses beider Kugelsorten erreicht werden. Die Fremdkörper geringer Dichte und kleinen Durchmessers tendieren dazu, zum Rand der Schale zu migrieren, während die Kugeln hoher Dichte und großen Durchmessers die Migration in Richtung des Schalen-zentrums bevorzugen. Als Ursache für das Transportverhalten der Fremdkörper ist eine Abhängigkeit der Migrationsrichtung von einem Dichtegradienten entlang des radialen Abstandes der kleineren Kugeln zum Schalen-zentrum zu vermuten. Während der horizontale Paranusseffekt die Migration von leichten, beweglichen Fremdkörpern in Bereiche geringer Packungsdichte zeigt, wird beim umgekehrten horizontalen Paranusseffekt ein schwerer Fremdkörper hoher Massenträgheit in Gebiete hoher Dichte gedrängt. Sowohl für das Auftreten des horizontalen Paranusseffektes als auch des umgekehrten horizontalen Paranusseffektes muss die Füllichte  $\mu$  der den Fremdkörper umgebenden Kugeln einen kritischen Wert überschreiten. Dieser sinkt mit wachsender Amplitude  $A$  und ist unabhängig von der eingestellten Frequenz  $\nu$ . Eine Abhängigkeit der kritischen Füllichte von dem Durchmesser- und Dichteverhältnis der betrachteten Kugelsorten ist ebenfalls nicht erkennbar. Die kritische Füllichte für das Auftreten des horizontalen Paranusseffektes liegt stets unterhalb der für das Auftreten des umgekehrten Effektes (s. auch Schnautz et al. (2004)). Im Fall der Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalen-zentrums müssen die den Fremdkörper umgebenden Kugeln im festkörperartigen Zustand sein, d. h. in der plastischen und in der fluidartigen Phase kann dieser Effekt nicht beobachtet werden (Abb. 4.40). Ein ganz ähnliches Verhalten konnten wir auch für 19 Fremdkörper beobachten (Aumaître et al. 2003). Die Migration eines Fremdkörpers zum Schalenrand scheint mit dem Phasenübergang von der plastischen in die fluidartige Phase verknüpft zu sein. Während in der plastischen Phase kein Transport zu beobachten ist, ist die Migration eines Fremdkörpers zum Schalenrand sowohl in der fluidartigen als auch in der festkörperartigen Phase präsent.

# Kapitel 5

## Simulation

In diesem Kapitel wird eine numerische Simulation des in dieser Arbeit diskutierten granularen Systems vorgestellt. Dazu wird ein Modell verwendet, das das System rollender und stoßender Kugeln folgendermaßen vereinfacht: Die Dynamik von rollenden Kugeln wird auf das Verhalten harter, rotationsfrei rutschender Scheiben abgebildet. Mit der Verwendung des Begriffs *hart* ist gemeint, dass eine Scheibe bei einem Stoß mit einer weiteren Scheibe oder dem Rand der Schale nicht deformiert wird. Um das Verhalten von rollenden Kugeln möglichst realistisch darstellen zu können, wird eine Eigenschaft von Kugeln auf das in der Simulation verwendete Scheibensystem übertragen. Bei dieser Modifikation des Scheibenverhaltens handelt es sich um die in Abschnitt 4.2 beschriebene Eigenschaft einer rollenden Kugel im mitbewegten System der Schale -5/7 der Beschleunigung des sich bewegenden Untergrundes aufzunehmen. Der dadurch hervorgerufenen Bewegung der Scheiben wirkt die Gleitreibung gemäß  $F_G = \mu_G mg$  entgegen, wobei  $\mu_G$  der Gleitreibungskoeffizient ist. Stöße zwischen zwei Scheiben oder einer Scheibe und dem Rand der Schale sind inelastisch. Der Energieverlust der Scheiben bei einem Stoß ist durch den Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  mit  $\alpha_D < 1$  bestimmt. Die wichtigsten Funktionen des Quellcodes sind in Anhang B.2 dargestellt und werden in Abschnitt 5.1 erläutert.

Die Verwendung harter Scheiben hat zur Folge, dass die Kontaktdauer zweier Scheiben bei einem Stoß als Null angenommen wird und im Rahmen der numerischen Genauigkeit stets nur Zwei-Teilchen-Kontakte stattfinden können. In Hinsicht darauf bietet sich die Realisation der Simulation durch einen Ereignisdynamik orientierten Programmablauf an. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass jeweils nur binäre Stoßereignisse betrachtet und somit auch berechnet werden. In dem Zeitraum zwischen zwei Stoßereignissen wird die Bewegung der Teilchen geradlinig fortgesetzt. Bei einem Stoßereignis werden die Geschwindigkeiten der betroffenen Teilchen mit einem Kollisionsmodell neu bestimmt. Die Zeitschritte, nach denen das Verhalten der Teilchen betrachtet bzw. berechnet wird,

sind nicht konstant, sondern variieren in Abhängigkeit der Zeit zwischen zwei Stoßereignissen.

Der Ereignis-Dynamik orientierte Programmablauf ist Bestandteil der Molekulardynamik, einem theoretischen Ansatz, der ursprünglich zur Beschreibung molekularer Systeme dient. Ohne die Forderung an die simulierten Scheiben, hart zu sein, wäre ein Ereignis-Dynamik orientierter Programmablauf nicht realisierbar. Aufgrund der von Null verschiedenen Kontaktzeit zweier stoßender Scheiben könnten mehrere Stöße simultan stattfinden. Ein solches System wäre nur auf Basis der Molekulardynamik zu simulieren. Bei dieser Methode werden die Bahnkurven aller Teilchen durch die Lösung ihrer Newtonschen Bewegungsgleichungen bestimmt. Dadurch erhält man die Positionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Teilchen für diskrete Zeitschritte. Die Bewegung der Teilchen erfolgt in konstanten Zeitschritten, bis zwei oder mehrere Teilchen in Kontakt miteinander sind. Die Kontaktdauer der Teilchen während eines Stoßereignisses hängt davon ab, wie *weich* sie sind, d.h. wie stark sie durch einen Stoß deformiert werden. Die Ereignis-Dynamik hat gegenüber der Molekulardynamik den Vorteil einer Zeitersparnis für den Programmablauf, da insgesamt weniger Situationen, nämlich ausschließlich die Ereignisse betrachtet werden müssen, die für das Verhalten des Systems wesentlich sind. Als Ereignis bezeichnen wir zwei unterschiedliche Fälle. Zum einen werden Stoßereignisse betrachtet, bei denen entweder zwei Scheiben oder eine Scheibe und der Rand der Schale gegeneinander stoßen. Zum anderen werden Reibungsereignisse betrachtet, bei denen der Beeinflussung des Untergrundes der Schale auf die darauf rutschenden Scheiben Rechnung getragen wird.

Die Zeit  $t_S$  bis zum nächsten Stoßereignis muss nach jedem Ereignis neu bestimmt werden und ist abhängig von Betrag und Richtung der Scheibengeschwindigkeiten zum betrachteten Zeitpunkt  $t$ . Im Gegensatz dazu wird die Reibung diskretisiert, d.h. Reibungsereignisse erfolgen in konstanten Zeitabständen  $t_R$ . Um dies zu realisieren, wird die Kreisbewegung der Schale linearisiert, indem der Kreis durch ein regelmäßiges  $L$ -Eck angenähert wird. Dabei steht  $L$  für die Anzahl der Eckpunkte. Die hier vorgestellten Simulationsergebnisse werden mit  $L = 1024$  bestimmt. Zum einen sind die Abweichungen zu einem Kreis sehr gering ( $\sim 10^{-6}R$ ), zum anderen sind keine Abweichungen der Ergebnisse zu Simulationsdurchführungen mit einer deutlich höheren Anzahl an Eckpunkten  $L$  zu erkennen. Die Verwendung dieser Anzahl an Eckpunkten ( $L = 1024$ ) zeichnet sich dadurch aus, dass die Rechenzeit gegenüber einer höheren Anzahl an Eckpunkten geringer ist. Betrachtet man den Mittelpunkt der Schale, so läuft dieser auf einem regelmäßigen  $L$ -Eck. Auf den jeweils geraden Teilstücken zwischen zwei Eckpunkten ist der Betrag der Schalengeschwindigkeit konstant und wird bei Erreichen eines Eckpunktes aktualisiert. Zu Beginn einer Simulationsdurchführung liegt der Schalenmittelpunkt bei der Koordinate  $(0, A)$ . Die Koordinaten der Eck-

punkte berechnen sich zu

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1) = (-A \sin(2\pi l/L), -A \cos(2\pi l/L) - A) \quad (5.1)$$

mit  $l \in [0, L - 1]$ . Mit  $v_{S,x_1} = \Delta x_S/t_1$  und  $v_{S,y_1} = \Delta y_S/t_1$  berechnen sich die Geschwindigkeiten der Schale auf den geraden Teilstücken zwischen zwei Eckpunkten und unter Einhaltung der zu simulierenden Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  zu

$$v_{S,x_1} = -A(\sin(h(l+1)) - \sin(hl))/t_1 \quad (5.2)$$

$$\text{und } v_{S,y_1} = -A(\cos(h(l+1)) - \cos(hl))/t_1 \quad (5.3)$$

mit  $l \in [0, L - 1]$ ,  $h = 2\pi/L$  und  $t_1 = 1/(\nu L)$ .  $t_1$  ist die Zeit, die die Schale zum Durchlaufen eines beliebigen, geraden Teilstücks zwischen zwei Eckpunkten benötigt und  $\Delta x_S = x_1 - x_{l-1}$  bzw.  $\Delta y_S = y_1 - y_{l-1}$  steht für den Abstand zweier Eckpunkte der jeweiligen Komponente.

Es liegt nahe, die Zeit  $t_1$  mit der Zeit  $t_R$  für zwei aufeinander folgende Reibungsereignisse gleichzusetzen. Jedes Mal, wenn der Betrag und die Richtung der Schalengeschwindigkeit geändert werden, erfahren die Scheiben dies in Form eines Reibungsereignisses, d. h. auf die rutschenden Scheiben wirkt die Gleitreibung gemäß  $F_G = \mu_G mg$ . Weiterhin wird zu diesem Zeitpunkt die zuvor erwähnte 5/7-Abhängigkeit einer Kugel von dem beschleunigten Untergrund der Schale mit einbezogen. Demnach ändern alle Scheiben nach der Zeit  $t_1 = 1/(\nu L) = t_R$ , d. h. zu dem Zeitpunkt, an dem der Schalenmittelpunkt einen Eckpunkt  $l^*$  überschreitet, ihre Geschwindigkeiten gemäß

$$v'_{x,\text{neu}} = v_{x,\text{alt}} + (v_{S,x_{l^*-1}} - v_{S,x_{l^*}}) \cdot 5/7 \quad (5.4)$$

$$\text{und } v'_{y,\text{neu}} = v_{y,\text{alt}} + (v_{S,y_{l^*-1}} - v_{S,y_{l^*}}) \cdot 5/7, \quad (5.5)$$

worauf dann die Gleitreibung in Form von

$$v_{x,\text{neu}} = v'_{x,\text{neu}} + \text{sign}(v'_{x,\text{neu}}) \left( 981 \frac{cm}{s^2} \cdot \mu_G \cdot t_R \right) \quad (5.6)$$

$$\text{und } v_{y,\text{neu}} = v'_{y,\text{neu}} + \text{sign}(v'_{y,\text{neu}}) \left( 981 \frac{cm}{s^2} \cdot \mu_G \cdot t_R \right) \quad (5.7)$$

mit

$$\text{sign}(v'_{x,\text{neu}}) = \begin{cases} 1 & \text{für } v'_{x,\text{neu}} < 0 \\ -1 & \text{für } v'_{x,\text{neu}} > 0 \end{cases}$$

wirkt. Die y-Komponente wird analog behandelt.

Der Grund für die Diskretisierung der Reibung bzw. der Beschleunigung der Scheiben liegt darin, dass die Bewegung der Scheiben zur analytischen Berechnung der Stoßzeiten zweier Scheiben linearisiert werden soll. Das gleiche Problem stellt sich auch bei der Berechnung der Stoßzeit für einen Scheiben-Rand-Stoß.

Die durch zwei senkrecht zueinander ausgerichtete Sinusschwingungen realisierte Kreisbewegung der Schale macht eine analytische Bestimmung dieser Stoßzeit unmöglich. Zur Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Sinusfunktion muss eine transzendente Gleichung gelöst werden. Dies ist nur mit Hilfe einer numerischen Rechnung möglich. Zwar ist die numerische Bestimmung der Stoßzeit realisierbar, jedoch ist der Rechenaufwand und somit die Rechenzeit zu hoch, um die Simulation zum Vergleich oder zur Vorhersage experimenteller Daten heranzuziehen.

Wie bereits erwähnt, führt die Betrachtung inelastischer Stöße harter Scheiben dazu, dass im Rahmen der numerischen Genauigkeit nur binäre Scheibenstöße auftreten können. In der Realität können jedoch viele Stöße gleichzeitig stattfinden, und dieses Verhalten unterscheidet sich von einer Abfolge binärer Stöße (Falcon et al. 1998). Ein weiteres damit verknüpft Problem besteht in dem Auftreten eines sogenannten inelastischen Kollapses. Dies bedeutet, dass die Anzahl an Stößen in endlicher Zeit divergiert, was zum Stillstand der Simulation führt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines inelastischen Kollapses wächst mit der Füllichte  $\mu$  der Scheiben. Um dieses Szenario zu vermeiden und der Natur von Vielteilchenstößen gerecht zu werden, verwenden wir das von Luding & McNamara (1998) propagierte TC-Modell. Darin wird eine kritische Stoßzeit  $t_c$  eingeführt, bei deren Unterschreitung für zwei aufeinander folgende Stöße einer einzelnen Scheibe ein Vielteilchenstoß angenommen wird. Dabei wird der dissipative Charakter eines inelastischen Stoßes unterdrückt, um die unphysikalische Behandlung eines Stoßes bezüglich der Kontaktzeit zu kompensieren. Die verminderte Dissipation von Energie bei einem Vielteilchenstoß im Gegensatz zu einer Abfolge von binären Stößen wurde von Luding et al. (1994a), Luding et al. (1994b) und Falcon et al. (1998) untersucht und bestätigt.

## 5.1 Ablauf des Programms

Zu Beginn einer Simulationsdurchführung müssen einige Grundeinstellungen realisiert werden. Dazu gehören die initiale Positionierung der Scheiben in der Schale und die Zuteilung ihrer Startgeschwindigkeiten. Außerdem werden den Scheiben jeweils ein bestimmter Durchmesser und eine Masse zugeteilt.

Anfangs werden die Scheiben mit folgender Methode in der Schale verteilt: Die erste Scheibe wird im Zentrum der Schale positioniert. Die weiteren Scheiben werden in einem bestimmten Abstand zueinander und zu der ersten Scheibe kreisförmig um diese angelegt, sodass im Falle gleich großer Scheiben eine hexagonale Struktur entsteht. Sobald die erste Scheibe vollständig von anderen Scheiben umgeben ist, werden die nächsten Scheiben an die zweite Scheibe angelegt, bis auch diese vollständig von Scheiben umgeben ist. Dieser Prozess wird so lange fortgeführt, bis die gewünschte Anzahl an Scheiben in der Schale verteilt ist.

Die Scheiben können auch zufällig in der Schale verteilt werden, wobei das Ergebnis einer Simulationsdurchführung von der hier beschriebenen Methode nicht abweicht. Der Grund für die beschriebene Positionierung der Scheiben liegt darin, dass auf diese Weise eine größere Anzahl an Scheiben in der Schale platziert werden kann, als es bei einer zufälligen Positionierung der Scheiben möglich wäre.

Anschließend werden den Scheiben zufallsverteilte Geschwindigkeiten innerhalb eines bestimmten Bereichs zugeteilt. Dabei werden jeweils die x- und y-Komponente einer Scheibe einzeln betrachtet und mit Geschwindigkeiten versehen. Zur Generierung der Geschwindigkeiten wird die von Windows zur Verfügung gestellte Funktion "srand" benutzt. Diese ist so mit der Uhr des Computers verknüpft, dass bei jedem Programmstart unterschiedliche Startgeschwindigkeiten der Scheiben gewährleistet sind.

Nach dem Setzen der Anfangsbedingungen kann die Dynamik der Scheiben unter dem Einfluss einer horizontal kreisförmigen Oszillation simuliert werden. Zur Durchführung eines Ereignisses werden jeweils vier aufeinander folgende Schritte durchgeführt: Erstens wird die Zeit bis zum nächsten Ereignis bestimmt, zweitens werden die Positionen der Scheiben in Hinsicht auf die zuvor bestimmte Zeit aktualisiert, drittens werden die neuen, aus einem Stoß resultierenden Geschwindigkeiten der jeweiligen Stoßpartner berechnet und viertens werden die Scheiben bestimmt, für die die Zeit bis zum nächsten Ereignis neu berechnet werden muss.

1. Die Zeit bis zum nächsten Ereignis wird bestimmt. Dazu werden zunächst die Stoßzeiten  $t_{s,i,j}$  der Scheiben  $i$  und  $j$  mit  $i, j \in [0, N]$  berechnet.  $N$  beschreibt die Anzahl der Scheiben in der Schale, und 0 bezeichnet die Schale selbst, da auch ein Scheiben-Rand-Stoß als Stoßereignis betrachtet wird. Als Stoßzeit  $t_{s,i,j} = t_{s,j,i}$  wird die Zeit bezeichnet, die vergeht, bis die Scheibe  $i$  gegen die Scheibe  $j$  stößt. Für  $j = 0$  wird die Zeit berechnet, bis die Scheibe  $i$  gegen den Rand der Schale stößt.

Für den Stoß einer Scheibe mit dem Rand gibt es unter der Annahme einer Bewegung der Scheibe relativ zur Schale immer eine physikalisch sinnvolle Zeit, da die Scheiben kreisförmig vom Rand der Schale umgeben sind. Demgegenüber ist das Zustandekommen eines Stoßes zweier beliebiger Scheiben abhängig von dem Betrag und der Richtung ihrer Geschwindigkeiten. Für den Fall, dass zwei beliebige Scheiben  $i$  und  $j$  aufgrund ihrer momentanen Bewegungsrichtung nicht zusammenstoßen, wird die Stoßzeit  $t_{s,i,j} = t_{s,j,i}$  dieses Scheibenpaares mit einem willkürlichen Zahlenwert beschrieben. Um zu gewährleisten, dass dieser physikalisch nicht sinnvolle Wert durch die Zeit einer anderen Stoßkombination unterboten wird, ist er höher als die Zeit, die die langsamere der beiden Scheiben zum Durchqueren der gesamten Schale mit Radius  $R$  benötigt.

Um die Zeit bis zum nächsten Stoßereignis zu bestimmen, wird die minimale Zeit  $t_{S,\min}$  aus der Menge aller Stoßzeiten  $t_{S,i,j}$  mit  $i, j \in [0, M]$  bestimmt. Wir betrachten den Fall, dass das zeitlich nächste Ereignis durch den Zusammenstoß der Scheiben  $i$  und  $j$  gegeben ist. Dann ist die Zeit  $t_{S,i,j} = t_{S,i,\min} = t_{S,j,\min} = t_{S,j,i} = t_{S,\min}$  minimal aus der Menge aller Stoßzeiten  $t_{S,i,c}$  mit  $c \in [0, M]$ ,  $c \neq i$  für die Scheibe  $i$ . Dabei steht  $t_{S,i,\min}$  für die kleinste Stoßzeit der Scheibe  $i$  aus der Menge aller Stoßzeiten  $t_{S,i,c}$  mit  $c \in [0, M]$  und  $c \neq i$ . Das gleiche gilt für die Scheibe  $j$  bzw. für den Rand der Schale, wenn  $j = 0$ . Weiterhin gilt  $t_{S,\min} < t_{S,a,b}$  mit  $a, b \in [0, M]$  und  $a, b \neq i, j$ . Die Zeit  $t_{S,\min}$  wird dann verglichen mit  $t_{R,\text{Rest}}$ , der restlichen Zeit bis zum nächsten Reibungsereignis, d. h. der Zeit bis der Schalenmittelpunkt den nächsten Eckpunkt erreicht. Die endgültige Zeit  $t_E$  bis zum nächsten Ereignis bestimmt sich dann aus dem Minimum von  $t_{S,\min}$  und  $t_{R,\text{Rest}}$ .

Die Berechnung der Stoßzeit für die Scheiben  $i$  und  $j$  erfolgt nach

$$t_{S,i,j} = -\frac{\sqrt{b_{i,j}^2 - v_{i,j,\text{sq}}(r_{i,j,x}^2 + r_{i,j,y}^2 - (r_i + r_j)^2)} - b_{i,j}}{v_{i,j,\text{sq}}}. \quad (5.8)$$

Dabei ist

$$b_{i,j} = r_{i,j,x} \cdot v_{i,j,x} + r_{i,j,y} \cdot v_{i,j,y}, \quad (5.9)$$

$$r_{i,j,x} = x_{i,x} - x_{j,x}, \quad (5.10)$$

$$r_{i,j,y} = x_{i,y} - x_{j,y}, \quad (5.11)$$

$$v_{i,j,x} = v_{i,x} - v_{j,x}, \quad (5.12)$$

$$v_{i,j,y} = v_{i,y} - v_{j,y} \quad (5.13)$$

$$\text{und } v_{i,j,\text{sq}} = v_{i,j,x}^2 + v_{i,j,y}^2. \quad (5.14)$$

$x_i, y_i$  und  $x_j, y_j$  beschreiben die Positionen der Scheiben  $i$  und  $j$  während des Stoßes,  $v_{i,x}, v_{i,y}$  und  $v_{j,x}, v_{j,y}$  die Geschwindigkeiten der Scheiben  $i$  und  $j$  aufgeteilt in die horizontale Komponente  $x$  und die dazu senkrechte Komponente  $y$ .  $r_i + r_j$  beschreibt den Abstand ihrer Mittelpunkte, gegeben durch die Summe beider Scheibenradien. Eine physikalisch sinnvolle Stoßzeit der Scheiben  $i$  und  $j$  ist gegeben, wenn  $v_{i,j,\text{sq}} \neq 0$ ,  $b_{i,j} < 0$  und  $t_{S,i,j} > 0$ .

Demgegenüber gilt für die Stoßzeit der Scheibe  $i$  mit dem Schalenrand, berechnet im mitbewegten Koordinatensystem der Schale:

$$t_{S,i,0} = -a/(2b) + \sqrt{D} \quad (5.15)$$

mit

$$a = 2x_i v_{i,x} + 2y_i v_{i,y}, \quad (5.16)$$



$$b = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2, \quad (5.17)$$

$$c = x_i^2 + y_i^2 - (r_0 - r_i)^2 \quad (5.18)$$

$$\text{und } D = \frac{a^2}{4b^2} - \frac{c}{b}. \quad (5.19)$$

Einzige Voraussetzung für die Berechnung einer Stoßzeit ist in diesem Fall eine Relativbewegung zwischen Scheibe und Schale, d. h. es muss gelten:  $b > 0$ .

2. Es werden die Positionen aller Scheiben unter Berücksichtigung ihrer Geschwindigkeiten und der zuvor bestimmten Zeit  $t_E$  aktualisiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Scheiben sowie die Schale in der Zeit  $t + t_E$  geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Aufgrund der Definition von  $t_E$  befinden sich nach der Positionsaktualisierung genau zwei Scheiben bzw. eine Scheibe und der Rand der Schale in Kontakt miteinander, wenn  $t_E = t_{S,\min}$ , oder es liegen keine Kontakte vor, wenn  $t_E = t_{R,\text{Rest}}$ .

Wir betrachten den Fall, dass nach der Zeit  $t_E$  zwei Scheiben bzw. eine Scheibe und der Rand in Kontakt miteinander sind. Hervorgerufen durch numerische Ungenauigkeiten in der Zeitberechnung oder der Positionsaktualisierung der Scheiben kann es vorkommen, dass sich die beiden Stoßpartner geringfügig überlappen. Da die Bestimmung der Stoßzeiten auf einem Abstandskriterium der Scheibenmittelpunkte beruht, kann dann bei der nächsten Positionsaktualisierung folgendes Szenario auftreten: Die beiden Stoßpartner verhaken sich wie zwei Glieder einer Kette ineinander und können sich im weiteren Verlauf der Simulation nicht mehr voneinander lösen. Um dieser Situation entgegenzuwirken, werden die Stoßpartner im Falle eines Überlappens entgegen ihrer Bewegungsrichtung auseinander gezogen. Im Falle eines Stoßes zweier Scheiben ist dieser Prozess beendet, wenn ihr Abstand der Summe ihrer Radien entspricht. Bei einem Scheiben-Rand-Stoß muss der Abstand der Differenz von Schalen- und Scheibenradius entsprechen. Durch diese Prozedur können wiederum andere Scheibenpaare in die Situation eines Überlappens geführt werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Situation ist umso höher, je höher die Füllichte  $\mu$  ist, d. h. je geringer die mittlere freie Weglänge der Scheiben ist. Um dieses Problem zu egalisieren, wird bei jedem zehnten Stoßereignis eine Funktion zur Korrektur der Scheibenpositionen bzw. der Scheibenabstände aufgerufen. Diese zieht die betroffenen Scheiben entlang der durch die beiden Scheibenmittelpunkte eindeutig gegebenen Achse auseinander, bis das bereits erwähnte Radienkriterium erfüllt ist. Sollte dies wiederum ein Überlappen mit benachbarten Scheiben oder dem Rand der Schale zur Folge haben, wird diese Funktion wiederholt aufgerufen, bis alle Scheiben das Abstandskriterium erfüllen.

3. Die Geschwindigkeiten der beiden Stoßpartner, bzw. im Falle eines Scheiben-Rand-Stoßes die des Stoßpartners, werden aktualisiert. Alle anderen Scheiben behalten ihre derzeitigen Geschwindigkeiten, bis sie gegen eine weitere Scheibe bzw. gegen den Rand der Schale stoßen, oder ein Reibungsereignis eintritt. Die Stöße werden dabei als inelastische Stöße harter Scheiben betrachtet, bei denen zwar Energie dissipiert wird, der Gesamtimpuls jedoch erhalten bleibt. Das Kollisionsmodell zur Berechnung der neuen Geschwindigkeiten nach einem Stoß wird in Abschnitt 5.2 hergeleitet.
4. Es wird festgestellt, für welche der Scheiben  $k$  die Stoßzeit  $t_{S,k,\min}$  mit  $k \in [0, N]$  neu berechnet, d. h. der erste Schritt erneut durchgeführt werden muss. Zu Beginn der Simulation muss diese Zeit für jede Scheibe bestimmt werden. Danach ist es jedoch nicht mehr nötig, nach einem Stoßereignis die Stoßzeiten aller Scheiben neu zu berechnen. Wir betrachten den Fall eines Scheiben-Scheiben-Stoßes zwischen der Scheibe  $i$  und der Scheibe  $j$ . Wenn der Stoß dieser beiden Scheiben das nächste Ereignis darstellt, so ist die Zeit  $t_{S,i,j} = t_{S,j,i} = t_{S,i,\min} = t_{S,j,\min} = t_{S,\min} = t_E$  minimal aus der Menge aller Stoßzeiten  $t_{S,a,b}$  mit  $a, b \in [0, N]$  und  $t_{S,\min} < t_{R,\text{Rest}}$ . Die Stoßzeit einer Scheibe  $k$  mit  $k \in [0, N]$  und  $k \neq i, j$  bestimmt sich dann zu  $t_{S,k,\min_{\text{neu}}} = t_{S,k,\min_{\text{alt}}} - t_{S,\min}$ . Ausgenommen von dieser Regelung sind jedoch solche Scheiben  $k^*$ , die eine der Scheiben  $i$  oder  $j$  als Stoßpartner mit  $t_{S,k^*,i} = t_{S,k^*,\min}$  oder  $t_{S,k^*,j} = t_{S,k^*,\min}$  haben. Da die an dem Stoß beteiligten Scheiben  $i$  und  $j$  den Betrag und die Richtung ihrer Geschwindigkeit ändern, müssen die Stoßzeiten  $t_{S,k^*,\min}$  solcher Scheiben neu berechnet werden. Nach einem Reibungsereignis müssen jedoch die Stoßzeiten aller Scheiben neu berechnet werden, da sich sowohl die Richtung als auch die Beträge aller Scheibengeschwindigkeiten geändert haben. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der drastischen Reduktion der benötigten Rechenzeit zur Bestimmung der Stoßzeit  $t_{S,\min}$ . Dieses Zeitersparnis ist umso höher, je mehr Scheiben in der Simulation betrachtet werden.

## 5.2 Das Stoßgesetz

Im Folgenden wird das Gesetz zur Behandlung eines Zusammenstoßes zweier Scheiben hergeleitet. Zunächst wird ein zentraler, vollständig elastischer Stoß zweier Scheiben in einer Dimension<sup>1</sup> unter der Annahme von Impuls- und Energieerhaltung betrachtet. Anschließend werden die Überlegungen auf ein System inelastischer Stöße harter Scheiben übertragen und auf einen zweidimensionalen Raum erweitert. Bei der Betrachtung inelastischer Stöße bleibt der Gesamtimpuls

---

<sup>1</sup>Eine eindimensionale Behandlung des Stoßereignisses bedeutet, dass entweder die x- oder die y-Komponente der Scheibengeschwindigkeiten als Null angenommen wird.

der Scheiben erhalten, ein Teil der Scheibenenergie wird jedoch dissipiert.

Es seien  $\vec{v}_i$  und  $\vec{v}_j$  die Geschwindigkeiten der beiden Scheiben vor und  $\vec{v}_i'$  und  $\vec{v}_j'$  die Geschwindigkeiten der beiden Scheiben nach dem Stoß. Weiter seien  $m_i$  und  $m_j$  die Massen der Scheiben. Wir nehmen an, dass für die Geschwindigkeiten der Scheiben nach dem Stoß gilt:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \vec{A} \quad (5.20)$$

$$\text{und } \vec{v}_j' = \vec{v}_j + \vec{B} \quad (5.21)$$

$$\leftrightarrow m_i \vec{v}_i' = m_i \vec{v}_i + m_i \vec{A} \quad (5.22)$$

$$\text{und } m_j \vec{v}_j' = m_j \vec{v}_j + m_j \vec{B}. \quad (5.23)$$

Unter Berücksichtigung von Impuls- und Energieerhaltung berechnen sich  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  zu

$$\leftrightarrow \vec{A} = \frac{m_j}{m_i + m_j} 2(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad (5.24)$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{-m_i}{m_i + m_j} 2(\vec{v}_j - \vec{v}_i). \quad (5.25)$$

Damit gilt für die Geschwindigkeiten der Scheiben nach dem Stoß:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \frac{m_j}{m_i + m_j} 2(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad (5.26)$$

$$\text{und } \vec{v}_j' = \vec{v}_j + \frac{-m_i}{m_i + m_j} 2(\vec{v}_j - \vec{v}_i). \quad (5.27)$$

An dieser Stelle führen wir den Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  mit ( $0 \leq \alpha_D \leq 1$ ) ein, sodass gilt:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \frac{m_j}{m_i + m_j} (1 + \alpha_D) (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad (5.28)$$

$$\text{und } \vec{v}_j' = \vec{v}_j + \frac{-m_i}{m_i + m_j} (1 + \alpha_D) (\vec{v}_j - \vec{v}_i). \quad (5.29)$$

Ist  $\alpha_D = 1$ , so ist der Stoßvorgang vollständig elastisch und die Gesamtenergie der Scheiben nach dem Stoß bleibt erhalten. Für  $\alpha_D \neq 1$  sind Stöße zwischen zwei Scheiben mit einem Energieverlust behaftet. Dieser ist umso höher, je kleiner  $\alpha_D$  ist. Bei  $\alpha_D = 0$  ist der Stoß vollständig inelastisch. Die Abhängigkeit des Verhaltens der Scheiben von  $\alpha_D$  wird zusammen mit der Abhängigkeit von dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  in Abschnitt 5.4 dargestellt.

Barrat et al. (2001) benutzen einen Restitutionskoeffizienten, der mit einer Zufallsgröße behaftet ist. Brilliantov et al. (1996) und Goldmann et al. (1998) schlagen eine Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten von den Geschwindigkeiten der Scheiben während des Stoßes vor. Wie auch Krouskop & Talbot (2003),

Du et al. (1995) und Huthmann et al. (2000) wählen wir zur Vereinfachung einen konstanten Wert für den Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$ . Jedoch zeigt auch dieser aufgrund der Verwendung des TC-Modells eine gewisse Abhängigkeit von den Scheibengeschwindigkeiten. In Abhängigkeit davon, ob ein Stoßereignis als Zwei- oder Vierteilchenstoß angenommen wird, nimmt  $\alpha_D$  einen endlichen, konstanten Wert mit  $\alpha_D < 1$  an oder es gilt:  $\alpha_D = 1$ . Die Bestimmung des Wertes für den Restitutionskoeffizienten ist in Abschnitt 5.5 dargestellt.

Diese Überlegungen werden nun auf ein zweidimensionales System übertragen. Um das Kollisionsmodell der Scheiben möglichst einfach zu halten, wird es in Anlehnung an Barrat & Trizac (2002), Du et al. (1995), Huthmann et al. (2000) und Krouskop & Talbot (2003) durch nur einen inelastischen Parameter gekennzeichnet. Dieser ist der zuvor eingeführte Restitutionskoeffizient  $\alpha_D$ , welcher entlang der normalen Geschwindigkeitskomponente beider Scheiben wirkt. Die normale Geschwindigkeitskomponente ist jeweils die Komponente der Scheibengeschwindigkeiten, die entlang einer geradlinigen Verbindung der Scheiben durch ihre Mittelpunkte wirkt. Die dazu senkrechte Komponente ist die Tangentialkomponente. Sie wird aufgrund der Betrachtung rotationsfreier Scheiben und der damit verbundenen Absenz eines Drehmomentes durch den Stoß zweier Scheiben nicht beeinflusst. Dies ist eine starke Simplifizierung des Stoßverhaltens rollender Kugeln im Experiment. Wie Möbius et al. (2001) jedoch zeigen wird die Dynamik der Teilchen durch diese Einschränkung typischerweise nicht bemerkenswert beeinflusst.

Demnach lautet das Stoßgesetz für zwei Scheiben mit Geschwindigkeiten  $\vec{v}_i$  und Positionen  $\vec{r}_i$  in einem zweidimensionalen System:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \frac{m_j}{m_i + m_j}(1 + \alpha_D)[(\vec{v}_j - \vec{v}_i)\hat{r}_{i,j}]\hat{r}_{i,j} \quad (5.30)$$

$$\text{und } \vec{v}_j' = \vec{v}_j + \frac{-m_i}{m_i + m_j}(1 + \alpha_D)[(\vec{v}_j - \vec{v}_i)\hat{r}_{i,j}]\hat{r}_{i,j}, \quad (5.31)$$

mit  $\hat{r} = \vec{r}_{i,j}/r_{i,j}$  und  $r_{i,j} = |\vec{r}_{i,j}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ .

Da wir in der Simulation die Geschwindigkeiten der Scheiben in horizontaler x-Richtung und vertikaler y-Richtung separat betrachten, ergibt sich das Stoßgesetz in Komponentenschreibweise zu

$$v_{i,x}' = v_{i,x} - b_{i,j} \cdot m_j \cdot r_{i,j,x}/\sigma^2, \quad (5.32)$$

$$v_{i,y}' = v_{i,y} - b_{i,j} \cdot m_j \cdot r_{i,j,y}/\sigma^2 \quad (5.33)$$

$$\text{und } v_{j,x}' = v_{j,x} + b_{i,j} \cdot m_i \cdot r_{i,j,x}/\sigma^2, \quad (5.34)$$

$$v_{j,y}' = v_{j,y} + b_{i,j} \cdot m_i \cdot r_{i,j,y}/\sigma^2 \quad (5.35)$$

mit

$$r_{i,j,x} = x_i - x_j, \quad (5.36)$$

$$r_{i,j,y} = y_i - y_j, \quad (5.37)$$

$$v_{i,j,x} = v_{i,x} - v_{j,x}, \quad (5.38)$$

$$v_{i,j,y} = v_{i,y} - v_{j,y}, \quad (5.39)$$

$$b_{i,j} = (1 + \alpha_D)(r_{i,j,x} \cdot v_{i,j,x} + r_{i,j,y} \cdot v_{i,j,y}) \quad (5.40)$$

$$\text{und } \sigma^2 = (r_i + r_j)^2. \quad (5.41)$$

Für einen Scheiben-Rand-Stoß gilt dieselbe Vorschrift mit  $m_0 = m_{\text{Rand}} \rightarrow \infty$  und der Einschränkung, dass die Scheiben nur in Richtung des Schalen-zentrums, d. h. in Richtung der Normalkomponente, reflektiert werden. Die Tangentialkomponente einer Scheibe wird nach dem Stoß mit dem Rand auf Null gesetzt. Andernfalls erhält man ein physikalisch unrealistisches Verhalten, bei dem sich die Scheiben wie in einer Zentrifuge am Rand der Schale ansammeln, wenn der Restitutionskoeffizient  $\alpha_D$  kleiner 1 ist.

### 5.3 Variation der Amplitude $A$ und der Frequenz $\nu$

Um die Abhängigkeit des Scheibenverhaltens von der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  zu untersuchen, werden die Geschwindigkeitsverteilungen für feste Werte der Füll-dichte  $\mu$ , des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  und des Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  betrachtet. Der Scheibendurchmesser entspricht mit  $d = 1,0$  cm dem der Kugeln des Typs 5. Weiterhin wird ein reibungsfreies System ( $\mu_G = 0$ ) vollständig elastischer Stöße ( $\alpha_D = 1$ ) betrachtet. Als Füll-dichte wählen wir  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ). Es wäre naheliegend, die Untersuchung für eine Füll-dichte  $\mu$  durchzuführen, die im mittleren Bereich der zuvor experimentell betrachteten Füll-dichten liegt. Dem entspricht die fluidartige Phase. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kugeln sowohl durch den Rand als auch durch den Untergrund der Schale angeregt werden (vgl. Unterabschn. 4.1.2). In Unterabschnitt 5.6.4 wird jedoch gezeigt, dass eine Anpassung der Simulation an das Experiment in Hinsicht auf die Topologie der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung in der fluidartigen Phase ( $\mu = 0,57$ ) nicht zufriedenstellend ist. Mit  $\mu = 0,4$  wird deshalb eine Füll-dichte gewählt, die der plastischen Phase zuzuordnen ist.

Abbildung 5.1 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße ( $\mu_G = 0$ ,  $\alpha_D = 1$ ) und die Anpassung einer Gauß-Verteilung. Abweichungen der numerisch gewonnenen Geschwindigkeitsverteilung von einer Gauß-Verteilung sind sowohl bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen in der Nähe des Maximums um 0 cm/s als auch in den äußeren Flanken bei höheren Geschwindigkeitsbeträgen zu sehen. Auch hier wird die Abweichung von der Gauß-Verteilung analog zu der in Abschnitt 4.2 diskutierten Abhängigkeit der Verteilung von der Art und Weise der Energiezufuhr begründet. Wie

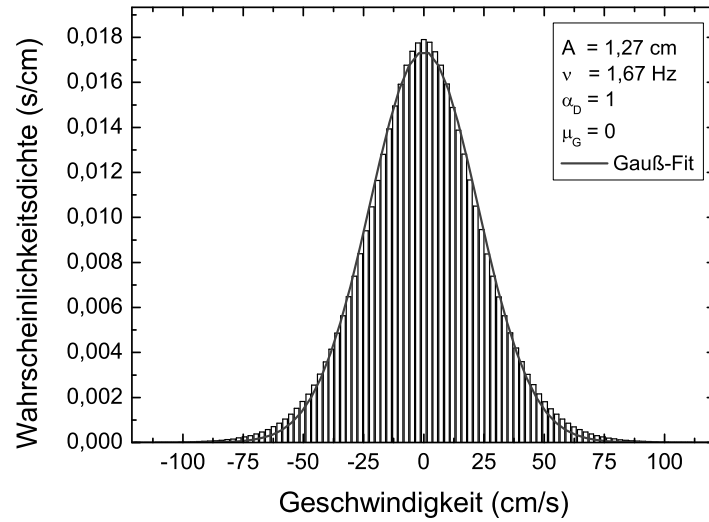


Abbildung 5.1: Numerische Geschwindigkeitsverteilung für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße ( $\mu_G = 0$ ,  $\alpha_D = 1$ ) und Anpassung einer Gauß-Verteilung (-). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm, die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz und die Füllichte  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ).

auch in Abschnitt 4.2 ist die Fläche aller hier vorgestellten Verteilungen auf Eins normiert.

Um nun die Abhängigkeit der Verteilung von der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  zu untersuchen, werden  $A$  und  $\nu$  jeweils für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße variiert. Bei der Variation einer der beiden Größen  $A$  und  $\nu$  wird die jeweils andere konstant gehalten. Abbildung 5.2 zeigt die Abhängigkeit der Verteilung von der Amplitude  $A$  bei konstanter Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz. Um die Entwicklung der Verteilung mit wachsendem  $A$  zu betrachten, werden die Ergebnisse von 16 verschiedenen Amplituden in einem Offset-Diagramm dargestellt. Dabei entspricht einer Erhöhung der Amplitude um  $0,32$  cm eine Offset-Erhöhung in der Wahrscheinlichkeitsdichte um  $0,035$  s/cm. Außerdem werden die Ergebnisse aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht als Balken- sondern als Liniendiagramme dargestellt. Wie zu erwarten, flacht die Verteilung mit wachsender Amplitude  $A$  ab und weitet sich zu immer größer werdenden Geschwindigkeiten aus. Der Grund dafür ist, dass die Scheiben mit wachsender Amplitude bei konstanter Frequenz höher werdende Beschleunigungen erfahren und somit auch höhere Geschwindigkeiten erreichen. Das gleiche gilt für die Erhöhung der Frequenz  $\nu$  bei konstanter Amplitude  $A = 1,27$  cm (Abb. 5.3). Auch die Frequen-

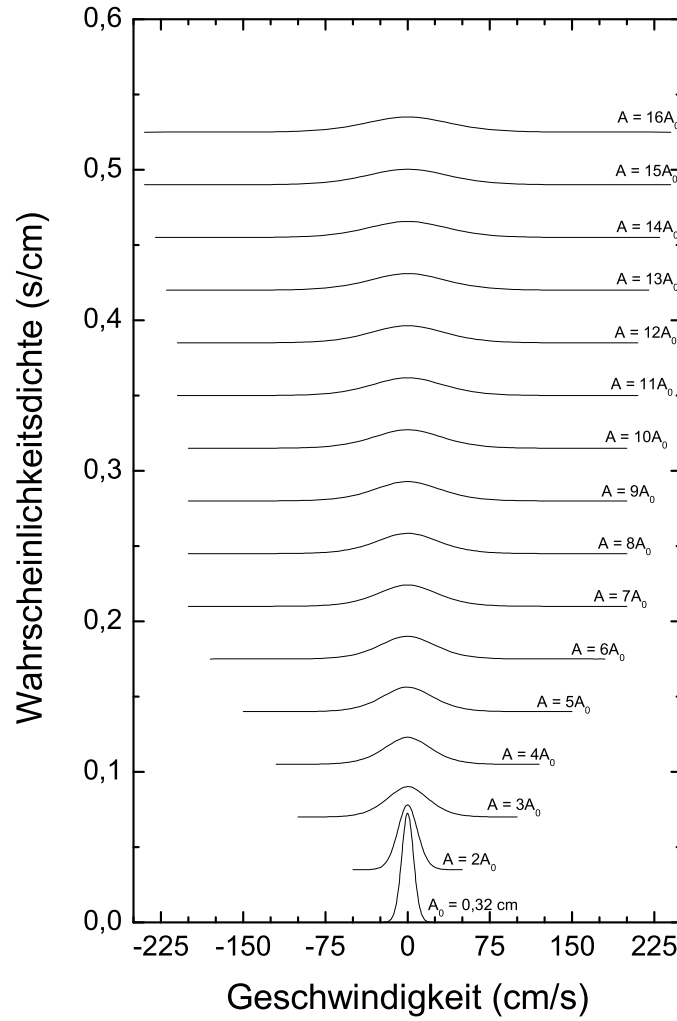


Abbildung 5.2: Numerische Geschwindigkeitsverteilungen für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße ( $\mu_G = 0$ ,  $\alpha_D = 1$ ) in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  bei konstanter Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz und Füllichte  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ). Die Amplitude wird in 16 Schritten von  $A = 0,32$  cm bis  $A = 5,08$  cm variiert. Die Ergebnisse sind mit einem amplitudenabhängigen Offset dargestellt.

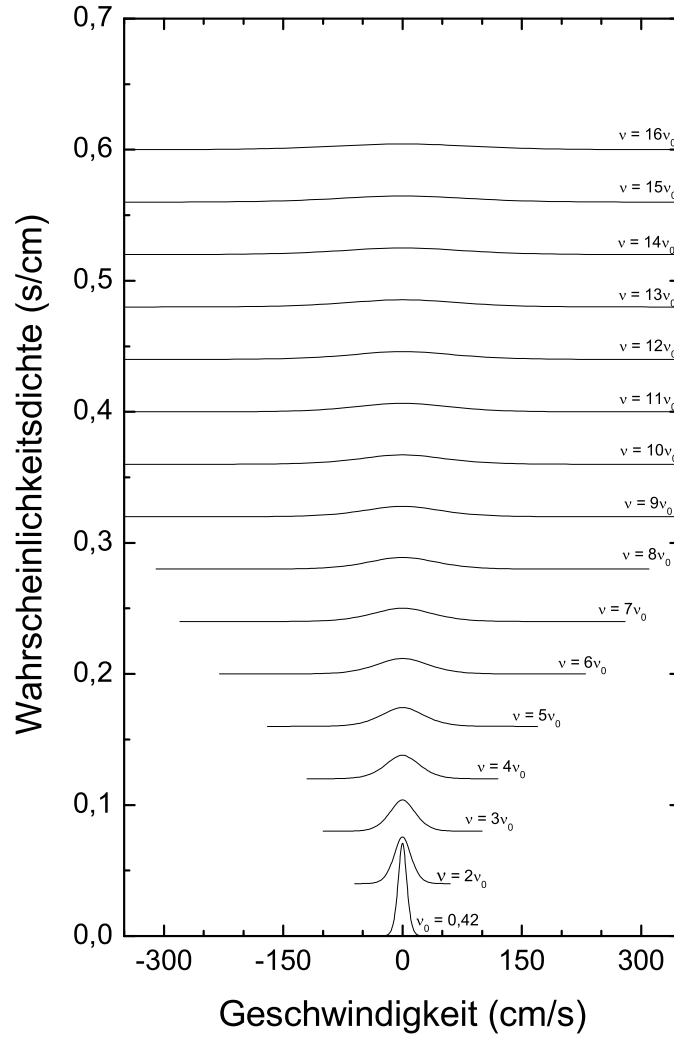


Abbildung 5.3: Numerische Geschwindigkeitsverteilung für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße ( $\mu_G = 0$ ,  $\alpha_D = 1$ ) in Abhängigkeit der Frequenz  $\nu$  bei konstanter Amplitude  $A = 1,27$  cm und Füllichte  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ). Die Frequenz wird in 16 Schritten von  $\nu = 0,42$  Hz bis  $\nu = 6,68$  Hz variiert. Die Ergebnisse sind mit einem frequenzabhängigen Offset dargestellt.



Amplitude $A$ (cm)	Frequenz $\nu$ (Hz)
0,32	0,42
0,64	0,84
1,27	1,67
2,54	3,34
5,08	6,68

Tabelle 5.1: Wertetabelle für Amplitude  $A$  und Frequenz  $\nu$  zur Untersuchung der Systemskalierung.

zerhöhung führt zu einer höheren Beschleunigung der Kugeln und äußert sich ebenfalls in einer abflachenden Verteilung, die sich zu höheren Geschwindigkeiten ausweitet. Die Offset-Erhöhung in der Wahrscheinlichkeitsdichte beträgt hier 0,04 s/cm für eine Erhöhung der Frequenz um 0,42 Hz.

An dieser Stelle wird untersucht, ob das System z. B. mit  $A \omega$ ,  $A \omega^2$  oder der Froude-Zahl  $A^2 \omega^2$  skaliert, wobei  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz bezeichnet. In den drei genannten Fällen wäre das Verhalten des Systems allein abhängig von dem Produkt aus Amplitude  $A$  und Kreisfrequenz  $\omega$ , bzw.  $A$  und  $\omega^2$  oder  $A^2$  und  $\omega^2$ . Dazu werden 25 Kombinationen von Amplitude  $A$  und Frequenz  $\nu$  für ein reibungsfreies System vollständig elastischer Stöße untersucht. Die Werte für  $A$  und  $\nu$  können Tabelle 5.1 entnommen werden. Zusätzlich werden auch die zuvor vorgestellten Kombinationen von  $A$  und  $\nu$  für diese Untersuchung herangezogen.

Um den Zustand des Systems in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  zu charakterisieren, wird die in Abschnitt 4.3 des vorangegangenen Kapitels eingeführte granulare Temperatur  $T_G$  bestimmt. Dabei werden die Geschwindigkeiten aller Scheiben über einen bestimmten Zeitraum in Betracht gezogen. Abbildung 5.4 zeigt die granulare Temperatur  $T_G$  in Abhängigkeit der Frequenz  $\nu$  für fünf verschiedene Amplituden  $A$ . Die frequenzabhängigen Werte von  $T_G$  können gut durch Funktionen der Form  $y = ax^2$  mit dem Fitparameter  $a$  beschrieben werden. Der Fitparameter  $a$  wiederum hängt annähernd linear von der eingestellten Amplitude  $A$  ab (Abb. 5.5). Diese Ergebnisse führen zu folgender Abhängigkeit der granularen Temperatur  $T_G$  von der Frequenz  $\nu$ :

$$T_G = g(A)\nu^2 = c_1\omega^2 A, \quad (5.42)$$

wobei  $g(A)$  eine von  $A$  linear abhängige Funktion und  $c_1$  eine Konstante ist.

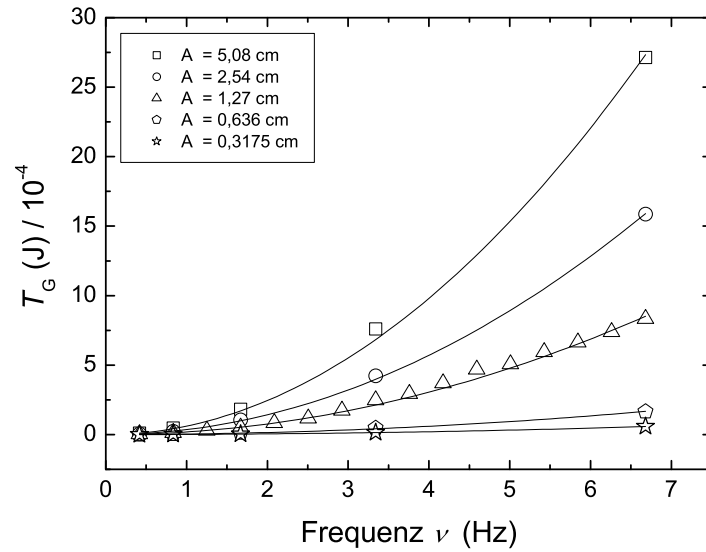


Abbildung 5.4: Granulare Temperatur  $T_G$  in Abhängigkeit der Frequenz  $\nu$  für fünf verschiedene Amplituden von  $A = 0,32$  cm bis  $A = 5,08$  cm. Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ). Die Frequenz wird jeweils in fünf Schritten von  $\nu = 0,42$  Hz bis  $\nu = 6,68$  Hz variiert. Für die Amplitude  $A = 1,27$  cm wird die Frequenz innerhalb der genannten Grenzen in 16 Schritten variiert. Die durchgezogenen Linien beschreiben die Anpassungen von Funktionen der Form  $y = ax^2$  mit dem Fitparameter  $a$  an die frequenzabhängigen Werte von  $T_G$  für die fünf verschiedenen Amplituden  $A$ .

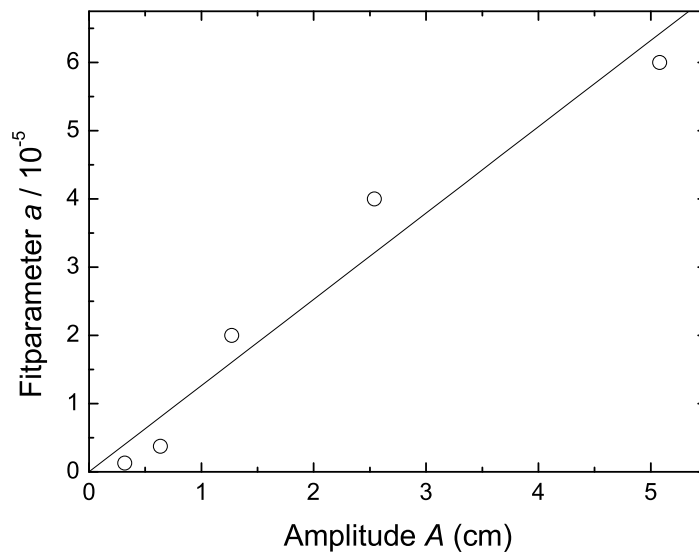


Abbildung 5.5: Fitparameter  $a$  für die granulare Temperatur  $T_G$  in Abhängigkeit der eingestellten Amplitude  $A$ . Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ).

Um den Zustand des Systems in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  für verschiedene Frequenzen  $\nu$  zu untersuchen, betrachte man Abbildung 5.6. Die amplitudenabhängigen Werte von  $T_G$  können gut durch Funktionen der Form  $y = bx$  mit dem Fitparameter  $b$  beschrieben werden. Abweichungen davon sind jedoch zu erkennen, wenn die Amplitude soweit reduziert wird, dass ihr Wert kleiner als der verwendete Scheibendurchmesser  $d$  ist. Die Abhängigkeit des Fitparameters  $b$  von der eingestellten Frequenz  $\nu$  ist quadratisch (Abb. 5.7). Dadurch ist die Abhängigkeit der granularen Temperatur  $T_G$  von der Amplitude  $A$  für verschiedene Frequenzen  $\nu$  gegeben durch:

$$T_G = f(\nu)A = c_2\omega^2 A, \quad (5.43)$$

wobei  $f(\nu)$  eine von  $\nu$  quadratisch abhängige Funktion und  $c_2$  eine Konstante ist.

Diese Ausführungen lassen vermuten, dass das System mit  $A\omega^2$  skaliert. Um die Gültigkeit dieser Vermutung zu überprüfen, wird  $T_G/A\omega^2$  für verschiedene Frequenzen  $\nu$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  und für verschiedene Amplituden  $A$  in Abhängigkeit der Frequenz  $\nu$  aufgetragen. Abbildung 5.8 zeigt den ersten Fall, für den  $T_G/A\omega^2$  für verschiedene Frequenzen  $\nu$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  dargestellt ist. Aufgrund der Abhängigkeit der granularen Temperatur  $T_G$  von der Amplitude  $A$  erwarten wir für beliebige Frequenzen einen konstanten Wert für  $T_G/A\omega^2$ , wenn die Amplitude  $A$  größer ist als der verwendete Scheibendurchmesser  $d$ . Abbildung 5.8 bestätigt diese Erwartung. Für Amplituden  $A$  mit  $A > d$  ( $d = 1,0$  cm) streuen die Werte für  $T_G/A\omega^2$  unsystematisch um den Mittelwert  $c_1 = (3,74 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$  kg·m. Für Amplituden  $A$  mit  $A < d$  ( $d = 1,0$  cm) weichen die Werte von  $T_G/A\omega^2$  mit mehr als 63 % deutlich von  $c_1$  zu kleineren Werten ab. Die zur Amplitude  $A = 1,27$  cm zusätzlich durchgeführten Messungen verschiedener Frequenzen  $\nu$  sind in Abbildung 5.8 aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht aufgeführt, werden aber zur Bestimmung von  $c_1$  mit einbezogen.

Abbildung 5.9 zeigt den zweiten Fall, in dem  $T_G/A\omega^2$  für verschiedene Amplituden  $A$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\nu$  dargestellt ist. Da dieser Darstellung der Ergebnisse die gleichen Werte wie in Abbildung 5.8 zugrunde liegen, gilt  $c_1 = c_2$  für alle Amplituden  $A$  mit  $A > d$  ( $d = 1,0$  cm). Ebenso weichen auch hier die Daten für Amplituden  $A$  mit  $A < d$  ( $d = 1,0$  cm) um mehr als 63 % von  $c_1 = c_2$  zu kleineren Werten ab.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das System im Rahmen der numerischen Messgenauigkeit mit  $A\omega^2$  skaliert, wenn die eingestellte Amplitude  $A$  größer ist als der verwendete Scheibendurchmesser  $d$ . Das Verhalten des Systems bezüglich der granularen Temperatur hängt somit einzig von dem Produkt aus Amplitude  $A$  und quadrierter Kreisfrequenz  $\omega^2 = (2\pi\nu)^2$  ab.

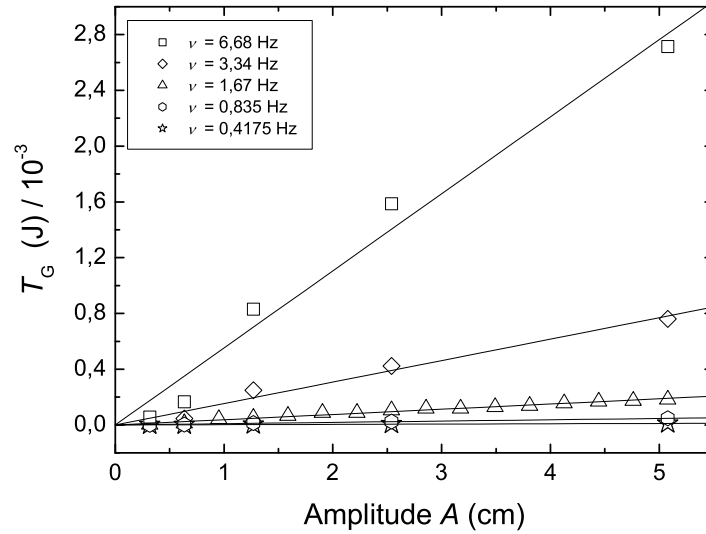


Abbildung 5.6: Granulare Temperatur  $T_G$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$  für fünf verschiedene Frequenzen von  $\nu = 0,42$  Hz bis  $\nu = 6,68$  Hz. Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ). Die Amplitude wird jeweils in fünf Schritten von  $A = 0,32$  cm bis  $A = 5,08$  cm variiert. Für die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz wird die Amplitude innerhalb der genannten Grenzen in 16 Schritten variiert. Die durchgezogenen Linien beschreiben die Anpassungen von Funktionen der Form  $y = bx$  mit dem Fitparameter  $b$  an die amplitudenabhängigen Werte von  $T_G$  für die fünf verschiedenen Frequenzen  $\nu$ .

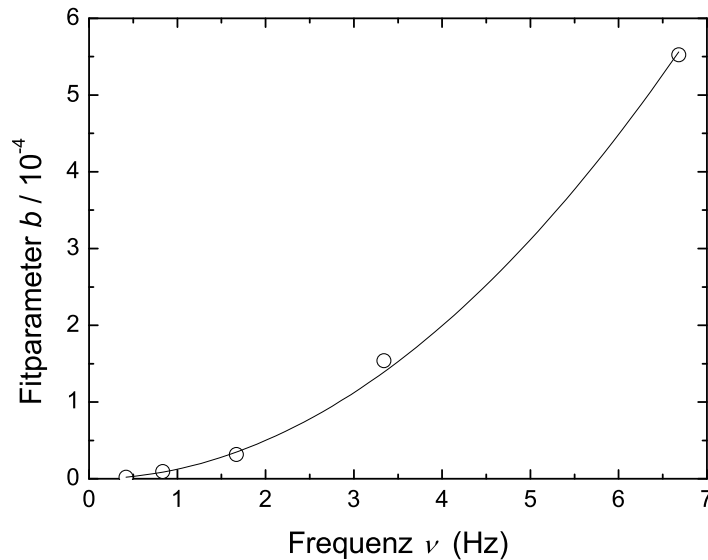


Abbildung 5.7: Fitparameter  $b$  für die granulare Temperatur  $T_G$  in Abhängigkeit der eingestellten Frequenz  $\nu$ . Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ).

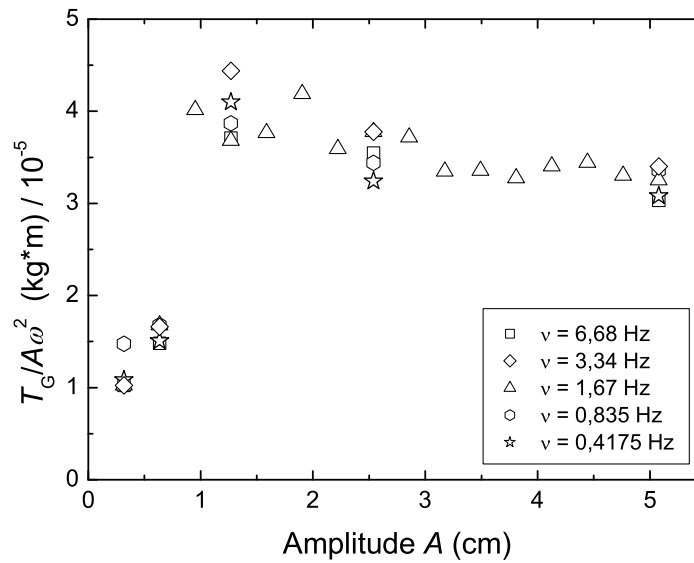


Abbildung 5.8:  $T_G/A\omega^2$  aufgetragen gegen die Amplitude  $A$  für fünf verschiedene Frequenzen  $\nu$ . Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ).

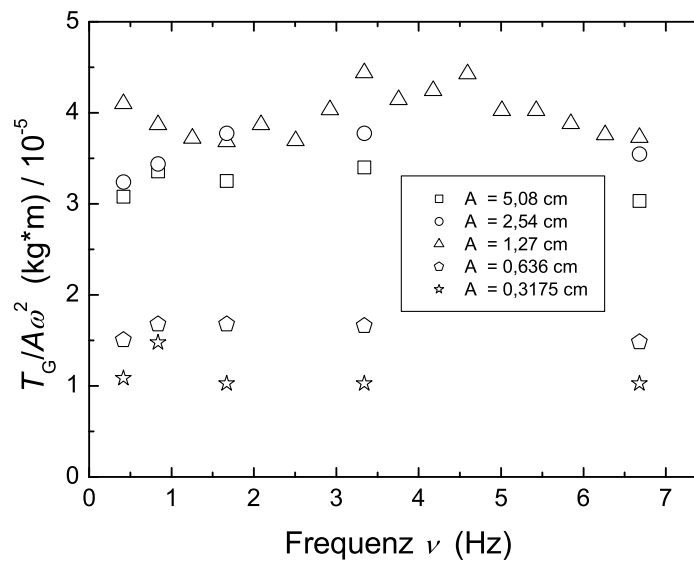


Abbildung 5.9:  $T_G/A\omega^2$  aufgetragen gegen die Frequenz  $\nu$  für fünf verschiedene Amplituden  $A$ . Das betrachtete System ist reibungsfrei ( $\mu_G = 0$ ), die Stöße sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ).

## 5.4 Variation des Restitutionskoeffizienten $\alpha_D$ und des Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G$

Um die Abhängigkeit des Scheibenverhaltens vom Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  und vom Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  zu untersuchen, werden die Geschwindigkeitsverteilungen für einen festen Wert der Füllichte  $\mu$  bei variierendem  $\alpha_D$  bzw.  $\mu_G$  betrachtet. Die Abhängigkeit wird anhand der Geschwindigkeitsverteilungen untersucht, da sie zum einen das Verhalten der Scheiben repräsentieren und zum anderen direkt mit den experimentellen Daten aus Abschnitt 4.2 verglichen werden können. Als Füllichte wählen wir erneut  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ), und der Scheibendurchmesser entspricht mit  $d = 1,0$  cm dem der Kugeln des Typs 5. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

Abbildung 5.10 zeigt die Geschwindigkeitsverteilungen einer Richtungskomponente in Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  für ein reibungsfreies System ( $\mu_G = 0$ ). Wie schon zuvor werden die Ergebnisse aus Gründen der Übersichtlichkeit als Liniendiagramme in einem Offset-Diagramm dargestellt. Dabei entspricht einer Verringerung des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  um 0,025 eine Offset-Erhöhung der Wahrscheinlichkeitsdichte von 0,005 s/cm. Der Restitutionskoeffizient  $\alpha_D$  wird in sechs Schritten von 0,95 bis 0,75 variiert. Eine weitere Verringerung des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  bewirkt keine weitere Änderung in der Topologie der Verteilung. Es ist zu erkennen, dass ein Übergang von einem zentralen Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen zu zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima stattfindet. Dabei ist die Bedeutung des Ausdrucks “kleine Geschwindigkeitsbeträge” analog zu der in Abschnitt 4.2 des vorangegangenen Kapitels zu verstehen. Die Maxima liegen im Grenzfall ( $\alpha_D \leq 0,75$ ) bei  $(\pm 9 \pm 0,3)$  cm/s, wobei 0,3 cm/s der halben hier verwendeten Intervallbreite entspricht. In diesen Fällen nimmt eine Geschwindigkeitskomponente der meisten Scheiben also einen Betrag an, der 67,57 % der maximalen Schalengeschwindigkeit  $v_{S,\max} = A2\pi\nu = 13,32$  cm/s entspricht.

Der Grund für diesen Übergang ist in dem Energieverlust der Scheiben mittels inelastischer Stöße zu finden. Nachdem die Scheiben vom Rand ins Innere der Schale gestoßen werden, dissipieren sie dort einen Teil ihrer Energie durch inelastische Stöße mit anderen Scheiben. Dabei werden sie von der zusätzlich eingeführten Kugeleigenschaft, -5/7 der Beschleunigung des Schalenuntergrundes aufzunehmen, zu einer Oszillation angeregt. Die Positionen der Maxima bei  $(\pm 9 \pm 0,3)$  cm/s für ( $\alpha_D = 0,75$ ) liegen etwa 3 % unterhalb des durch das 5/7-Argument erwarteten Wertes von  $\pm 5/7 \cdot v_{S,\max} = \pm 9,51$  cm/s. Das ist dadurch zu erklären, dass die Scheiben aufgrund des hohen Dissipationsanteils lokal sehr dicht gepackt sind und somit auch während der oszillierenden Bewegung inelastisch gegen andere Scheiben stoßen, was die durch das 5/7-Argument gewonnene Energie reduziert. Mit wachsendem  $\alpha_D$  gleicht das Verhalten der Scheiben immer

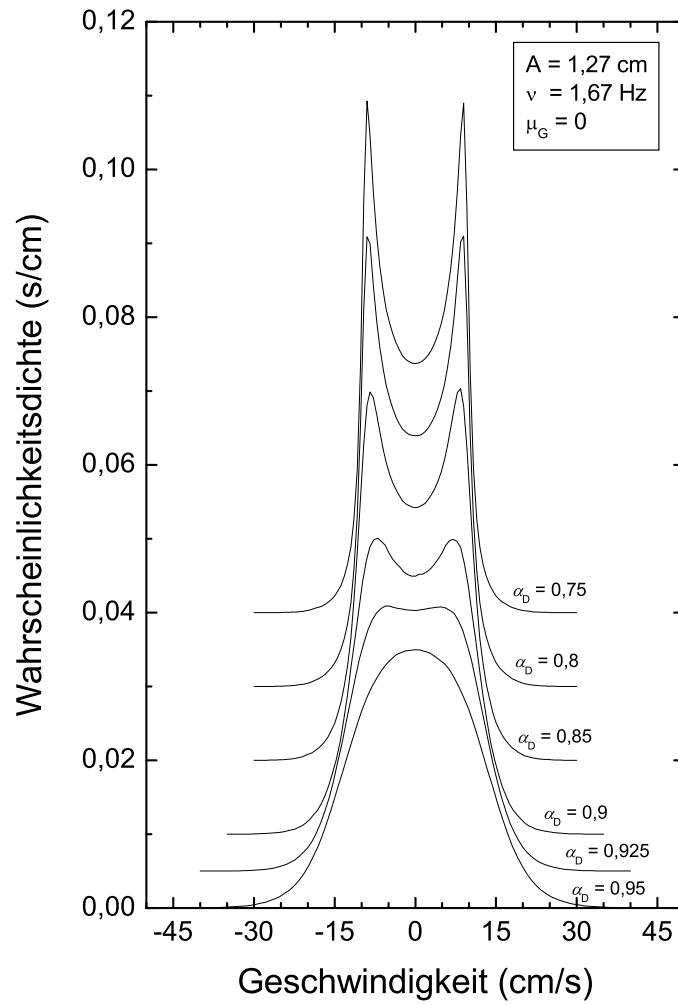


Abbildung 5.10: Abhängigkeit der Scheibengeschwindigkeiten von dem Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  in einem reibungsfreien System ( $\mu_G = 0$ ).  $\alpha_D$  wird von 0,95 bis 0,55 variiert. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27 \text{ cm}$  und die Frequenz  $\nu = 1,67 \text{ Hz}$ .

mehr dem eines Gases. Die entsprechende Geschwindigkeitsverteilung ähnelt einer Gauß-Verteilung (vgl. Abb. 5.1).

Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen die Geschwindigkeitsverteilungen einer Komponente in Abhängigkeit des Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  für ein vollständig elastisches System ( $\alpha_D = 1$ ). Die Aufspaltung der Ergebnisse in zwei Diagramme dient zur Verbesserung der Übersichtlichkeit. In diesem Fall beträgt die Offset-Erhöhung der Wahrscheinlichkeitsdichte 0,01 s/cm für eine Erhöhung des Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  um 0,002 mit  $0,016 \leq \mu_G \leq 0,0245$  und 0,35 s/cm für eine Erhöhung um 0,01 mit  $0,04 \leq \mu_G \leq 0,06$ . Auch hier ist ein Übergang von einem Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen zu zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu sehen. In diesem Fall umschließen die beiden Maxima jedoch kein zentrales Minimum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen, sondern bei allen hier vorgestellten Messungen verbleibt dort ein lokales Maximum. Obwohl dieses Maximum das Auftreten kleiner Geschwindigkeitsbeträge repräsentiert, wird es beinahe vollständig durch jene Scheiben hervorgerufen, die relativ zum Untergrund der Schale keine Bewegung ausüben, also exakt die Geschwindigkeit Null besitzen. Die Ansicht der Rohdaten der Geschwindigkeitsverteilung lässt diese Behauptung zu. Im Gegensatz zur Variation von  $\alpha_D$  erreichen die beiden symmetrisch um Null lokalisierten Maxima keine feste Position auf der Achse der Geschwindigkeit. Mit zunehmendem Gleitreibungskoeffizienten und  $\mu_G > 0,0245$  werden die Maxima zu immer kleineren Geschwindigkeitsbeträgen verschoben. Dabei wächst das zentrale Maximum weiter an und stellt bei  $\mu_G = 0,06$  bereits das absolute Maximum der Verteilung dar (Abb. 5.12). Für  $\mu_G \geq 0,102$  zeigen die Scheiben relativ zum Untergrund der Schale keine Bewegung mehr. Die Verteilung zeigt eine  $\delta$ -Verteilung bei Null. Die durch die Bewegung des Untergrundes auf die Scheiben übertragene Energie wird durch den hohen Gleitreibungskoeffizienten vollständig dissipiert. Auf eine Darstellung dieser Verteilung wird hier verzichtet.

Der kritische Wert für den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  kann analytisch bestimmt werden. Als kritisch wird dabei jener Wert bezeichnet, ab dem die Scheiben keine Bewegung mehr relativ zum Untergrund der Schale zeigen. Sei  $|\vec{F}_{\max}| = |\frac{5}{7}m\vec{a}_{S_{\max}}|$  der Betrag der Kraft, die maximal auf die Scheibe einer Masse  $m$  wirkt und  $|\vec{a}_{S_{\max}}| = A(2\pi\nu)^2$  die maximale Beschleunigung der Schale bzw. des Schalenuntergrundes. Damit berechnet sich der kritische Gleitreibungskoeffizient  $\mu_{G,kr}$  zu

$$\begin{aligned} \mu_{G,kr}mg &= \frac{5}{7}m \cdot |\vec{a}_{S_{\max}}| \\ \rightarrow \mu_{G,kr} &= \frac{\frac{5}{7}A(2\pi\nu)^2}{g} = 0,1018, \end{aligned} \quad (5.44)$$

wobei die Amplitude  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz beträgt und  $g = 981$  cm/s<sup>2</sup> die Erdbeschleunigung beschreibt.



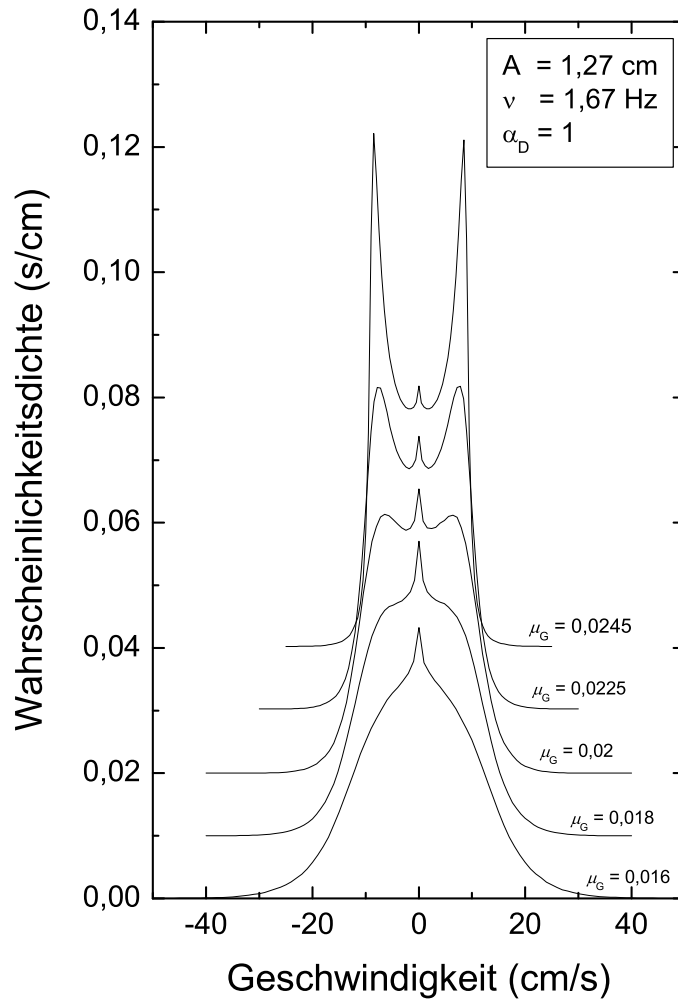


Abbildung 5.11: Abhängigkeit der Scheibengeschwindigkeiten von dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  für  $0,016 \leq \mu_G \leq 0,0245$ . Stöße zwischen Kugeln und mit dem Rand sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27 \text{ cm}$  und die Frequenz  $\nu = 1,67 \text{ Hz}$ .

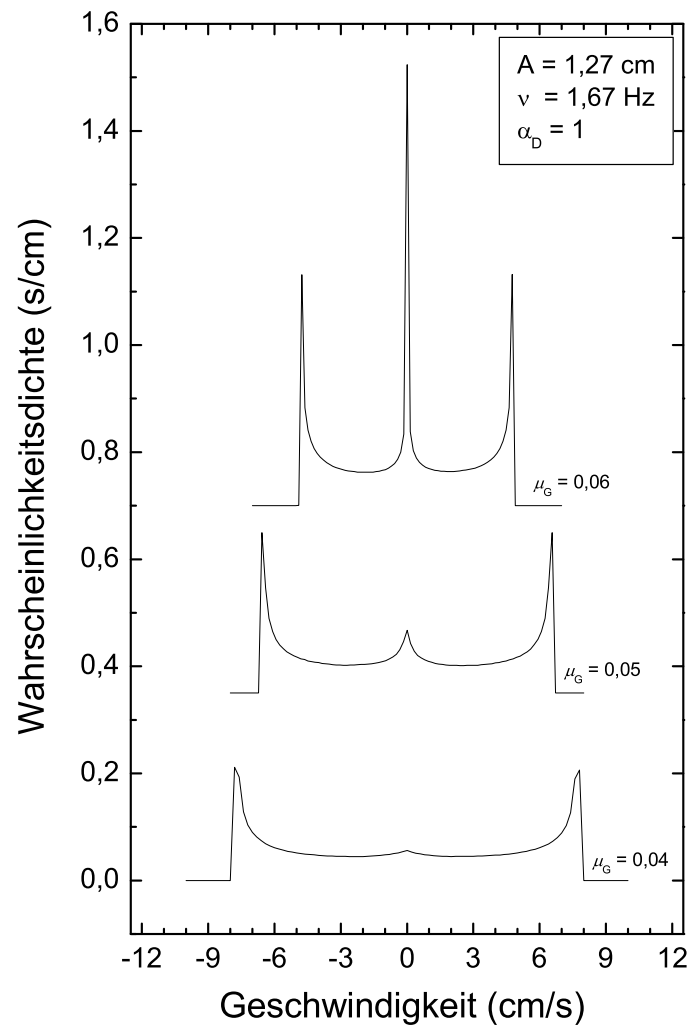


Abbildung 5.12: Abhängigkeit der Scheibengeschwindigkeiten von dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  für  $0,04 \leq \mu_G \leq 0,06$ . Stöße zwischen Kugeln und mit dem Rand sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27 \text{ cm}$  und die Frequenz  $\nu = 1,67 \text{ Hz}$ .

### Die Existenz ruhender Scheiben

Um die mit  $\mu_G$  wachsende Wahrscheinlichkeitsdichte der Scheiben, relativ zur Schale in Ruhe zu sein, zu verstehen, lokalisieren wir zunächst den Ort derjenigen Scheiben, deren Geschwindigkeit relativ zur Schale Null beträgt. In Abbildung 5.13 (a) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Abstand  $d_Z \pm \Delta d_Z/2$  der Scheiben mit der Geschwindigkeit Null zum Schalenmittelpunkt aufgetragen. Dabei steht  $\Delta d_Z$  für die Breite der betrachteten Kreisringe, d. h. für die Intervallbreite des Histogramms und beträgt bei den hier diskutierten Verteilungen 0,1 cm. Die Wahrscheinlichkeitsdichte wird unter Berücksichtigung der Flächengröße des jeweils betrachteten Kreisringes ermittelt. Zur besseren Orientierung repräsentiert die x-Achse der Verteilung jedoch den mittleren Abstand der Kreisringe zum Schalenzentrum. Aus diesem Grund ist die Normierung der Verteilung so zu verstehen, dass gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n 2\pi d_Z \Delta d_Z = 1, \quad (5.45)$$

wobei  $W$  die Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt. Diese Überlegungen gelten für alle in Abbildung 5.13 gezeigten Verteilungen. Zusätzlich ist der Verlauf der Verteilungen in einem zweidimensionalen Grauwertbild dargestellt. Der äußere schwarze Ring stellt den Rand der Schale dar.

Bei Vernachlässigung geringer Fluktuationen zeigt die kontinuierliche Verteilung in 5.13 (a) einen monoton wachsenden Verlauf. In der Nähe des Schalenrandes ( $R = 14,5$  cm) ist dieser von einer Struktur überlagert, die mit einer mittleren Abweichung von 10 % charakteristische Längen mit der Einheit des verwendeten Scheibendurchmessers  $d = 1,0$  cm aufweist. Mit kleiner werdendem Abstand  $d_Z$  zum Schalenzentrum sind drei Maxima bei den Werten  $(13,95 \pm 0,05)$  cm,  $(12,75 \pm 0,05)$  cm und  $(11,75 \pm 0,05)$  cm zu erkennen, die jeweils ein scharfes Minimum umschließen. Das absolute Maximum dieser Verteilung liegt bei  $(13,95 \pm 0,05)$  cm.

Abbildung 5.13 (b) zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Abstand  $d_Z$  aller Scheiben in der Schale zum Schalenzentrum. Dabei wird bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte darauf geachtet, dass das System nicht zu ausgezeichneten Zeitpunkten wie Stoßereignissen betrachtet wird, sondern in äquidistanten Zeitabständen. Dafür eignet sich die zuvor beschriebene Zeitscheibe der Reibungsereignisse. Die kontinuierliche Verteilung zeigt einen monotonen Abfall, der ebenfalls von einer Struktur in der Nähe des Schalenrandes überlagert ist. Auch hier sind drei durch die überlagerte Struktur gegebene Maxima zu erkennen, deren Abstände zueinander im Vergleich mit dem Durchmesser  $d$  der verwendeten Scheiben betrachtet werden. Die Positionen der Maxima liegen bei  $(13,95 \pm 0,05)$  cm,  $(12,75 \pm 0,05)$  cm und  $(11,45 \pm 0,05)$  cm. Die Abweichungen der Abstände zwischen den Maxima von dem verwendeten Scheibendurchmesser  $d = 1,0$  cm

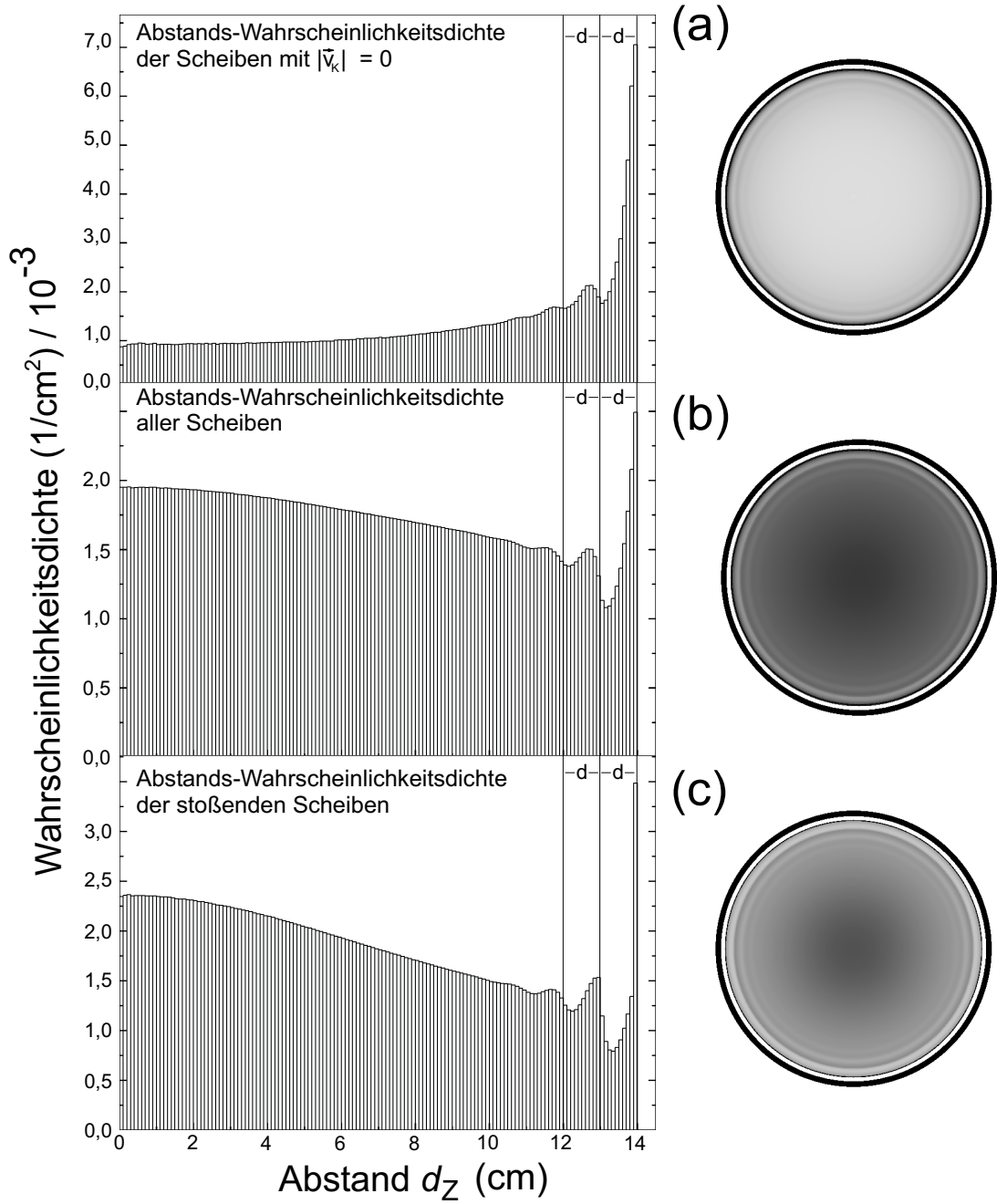


Abbildung 5.13: Histogramm der Abstände der Scheiben zum Schalenmittelpunkt, deren Geschwindigkeit relativ zu der oszillierenden Schale Null ist. Die Stöße in diesem System sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ) und der Gleitreibungskoeffizient hat den Wert  $\mu_G = 0,018$ . Die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ), die Amplitude  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

liegen im Mittel bei 25 %. Ein weiteres Maximum liegt bei  $(0,05 \pm 0,05)$  cm. Das absolute Maximum liegt wiederum bei  $(13,95 \pm 0,05)$  cm. Auch dieser Verlauf wird in einem zweidimensionalen Grauwertbild dargestellt. Die in der Nähe des Schalenrandes zu erkennende Ringstruktur wird auch von Scherer et al. (2000) beobachtet, deren experimenteller Aufbau sich in der Dimensionierung der verwendeten Schalen- und Kugelgrößen unterscheidet.

In der dritten Verteilung in Abbildung 5.13 (c) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Abstand  $d_Z$  derjenigen Scheiben aufgetragen, die einen Stoß durchführen. Hier wird das System immer zum Zeitpunkt eines Stoßereignisses, also nicht in konstanten Zeitabständen betrachtet. Im Falle eines Scheiben-Scheiben-Stoßes werden beide Positionen der Scheiben in die Statistik aufgenommen, im Falle eines Scheiben-Rand-Stoßes nur die Position der stoßenden Scheibe. Auch hier zeigt die kontinuierliche Verteilung einen monoton abfallenden Verlauf und somit ein Maximum bei  $(0,05 \pm 0,05)$  cm. Weiterhin ist auch diese Verteilung in der Nähe des Randes von einer Struktur überlagert. Die dadurch erkennbaren Maxima liegen bei  $(13,95 \pm 0,05)$  cm,  $(12,95 \pm 0,05)$  cm und  $(11,75 \pm 0,05)$  cm. Der jeweilige Abstand benachbarter Maxima weicht in dieser Struktur um 10 % von dem verwendeten Scheibendurchmesser ab und das absolute Maximum liegt wiederum bei  $(13,95 \pm 0,05)$  cm.

Der monotone Abfall der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Abstand aller Scheiben (Abb. 5.13 (b)) bzw. der Scheiben, die an einem Stoß beteiligt sind (Abb. 5.13 (c)), deutet auf eine inhomogene Verteilung der Kugeln in der Schale hin. Bei einer homogenen Verteilung erwartet man bei dieser Art der Auftragung einen konstanten Wert für die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $1,63 \cdot 10^{-3} \text{ 1/cm}^2$  (vgl. 5.45). Demnach nimmt die Packungsdichte der Scheiben, abgesehen von unmittelbarer Nähe zum Rand der Schale, mit dem Abstand  $d_Z$  zum Schalenzentrum ab.

In der Verteilung stoßender Scheiben (Abb. 5.13 (c)) repräsentiert das absolute Maximum die Stöße der Scheiben mit dem Rand der Schale. Zum Zeitpunkt eines Scheiben-Rand-Stoßes haben die betroffenen Scheiben einen Abstand von 14,0 cm zum Schalenzentrum ( $d = 1,0$  cm,  $R = 14,5$  cm). Im Falle der Verteilung aller Scheibenabstände (Abb. 5.13 (b)) repräsentiert dieses Maximum die Scheiben, die in der Nähe des Randes auf ihn zulaufen bzw. sich nach einem Stoß wieder von ihm entfernen. Da diese Verteilung bestimmt wird, wenn kein Stoßereignis vorliegt, kann zu diesem Maximum kein Beitrag von Scheiben geleistet werden, die den Abstand 14,0 cm vom Schalenzentrum haben. Dieser muss stets geringer sein. Daher erwartet man im Gegensatz zu der Verteilung stoßender Scheiben (Abb. 5.13 (c)) eine Verschiebung des Maximums zu kleineren Abständen. Die Auflösung der geringen Abstandsunterschiede beider Fälle erfordert jedoch einen sehr kleinen Wert für die Intervallbreite  $\Delta d_Z$ . Dies hat aber eine Erhöhung der für den Erhalt einer rauscharmen Verteilung benötigten Rechenzeit zur Folge,

was die Durchführung einer feineren Messung erschwert.

Das zu kleineren Abständen verschobene zweite sichtbare Maximum hat im Falle der Verteilung stoßender Scheiben mit  $(12,95 \pm 0,05)$  cm einen Abstand von exakt einem Scheibendurchmesser  $d$  zum absoluten Maximum (Abb. 5.13 (c)). Dies ist verständlich, da der Rand eine räumliche Begrenzung für die Scheiben darstellt, von dem sie zurück ins Schaleninnere gestoßen werden. Wenn weitere, auf den Rand zulaufende Scheiben gegen diese stoßen, haben sie daher aus geometrischen Gründen im Mittel einen um einen Scheibendurchmesser  $d$  geringeren Abstand zum Schalenzentrum. Mit wachsender Entfernung nimmt der Einfluss des Randes immer weiter ab. Daher werden die Maxima immer schwächer und weichen von dem charakteristischen Abstand des Scheibendurchmessers ab. Eine Übereinstimmung der Positionen für die beiden weiteren randnahen Maxima in Abbildung 5.13 (b) und 5.13 (c) ist nicht zu erwarten. Lokal kann das System möglicherweise eine hohe Fülldichte aufweisen, ohne dass diese Region durch eine hohe Anzahl an Stößen gekennzeichnet ist. Dies kann beispielsweise in der plastischen Phase der Fall sein (vgl. Unterabschn. 4.1.1).

Um den Verlauf der Verteilung der Scheiben  $k$  mit  $|\vec{v}_k = 0|$  (Abb. 5.13 (a)) zu verstehen, betrachten wir zunächst das Verhalten in unmittelbarer Nähe des Randes der Schale. Die Position des absoluten Maximums stimmt mit  $(13,95 \pm 0,05)$  cm mit der Position des absoluten Maximums für die Abstandswahrscheinlichkeitsdichte aller Scheiben (Abb. 5.13 (b)) sowie der stoßenden Scheiben (Abb. 5.13 (c)) überein. Wie bereits für die zuletzt genannten Verteilungen erwähnt, erwarten wir auch hier eine Verschiebung des Maximums zu kleineren Abständen bei einer Reduzierung der Ring- bzw. Intervallbreite  $\Delta d_z$ . Experimentell ist es zwar durchaus möglich, dass eine Kugel in Kontakt mit dem Rand ist und die Geschwindigkeit Null relativ zu ihm besitzt, in der Simulation können solche Fälle jedoch nicht auftreten.

Im Experiment tritt dieser Fall zum einen dann auf, wenn eine aus dem Zentrum der Schale auf den Rand zulaufende Kugel durch den Stoß mit dem Rand eine Umkehr der Bewegungsrichtung erfährt und wieder in Richtung des Schaleninneren läuft. Aufgrund der verschwindenden Kontaktzeit in der Simulation und der daraus resultierenden Tatsache, dass lediglich die Geschwindigkeiten vor und nach einem Stoß betrachtet werden, kann dieser Fall in der Simulation nicht auftreten. Zum anderen ist es möglich, dass eine Kugel, die im Laborsystem mit einer geringen Relativgeschwindigkeit zur Schale gegen den Rand stößt, ihre vorherige Bewegungsrichtung trotzdem beibehält. Wenn der Rand bzw. die Schale zu diesem Zeitpunkt die gleiche Bewegungsrichtung wie die Kugel hat und eine negative Beschleunigung erfährt, können Kugel und Rand relativ zueinander sowohl in Ruhe als auch in Kontakt sein. Dieses Szenario bleibt so lange erhalten, bis die Schale und somit auch der Rand die Bewegungsrichtung ändert und das Vorzeichen der Beschleunigung wechselt. Jedoch ist auch dieser Fall in der Simu-

lation nicht möglich, da dies einen inelastischen Kollaps hervorrufen würde, der die weitere Durchführung der Simulation ausschließt.

Gelöst wird dieses Problem in der Simulation, indem zunächst der Betrag der Normalkomponente der Scheibengeschwindigkeit gemäß  $|\vec{v} \cdot \hat{r}|$  zum Zeitpunkt eines Randstoßes bestimmt wird. Unterschreitet dieser Wert einen bestimmten Schwellwert, so führt dies in der Simulation zu einem inelastischen Kollaps. Dabei ist  $\hat{r}$  der Einheitsvektor in normaler Richtung. Aus Gründen der Rechenzeitoptimierung erfolgt die Überprüfung des Geschwindigkeitskriteriums komponentenweise für die x- und die y-Komponente des normalen Geschwindigkeitsvektors. Dieses Kriterium ist nur dann erfüllt, wenn es für beide Komponenten zutrifft. Dazu wird zunächst ein Vektor gemäß  $\vec{v}_{\text{norm}} = (\vec{v} \cdot \hat{r})\hat{r}$  erstellt, der den Betrag  $|\vec{v} \cdot \hat{r}|$  hat und in Richtung der normalen Geschwindigkeit zeigt. Zur Überprüfung des Geschwindigkeitskriteriums werden dann die Komponenten  $v_{\text{norm},x}$  und  $v_{\text{norm},y}$  dieses Vektors herangezogen. Anschließend wird das zuvor beschriebene Szenario einer Kugel, die über einen bestimmten Zeitraum in Kontakt mit dem Rand der Schale ist, in der Simulation folgendermaßen vereinfacht: Die Scheiben lösen sich bei gegebener Notwendigkeit sofort vom Rand der Schale ab, ohne der Bewegung der Schale bzw. des Randes, wie zuvor erläutert, gefolgt zu sein. Dabei werden die Tangentialkomponenten  $v_{\text{tang},x}$  und  $v_{\text{tang},y}$  aus den in Abschnitt 5.2 genannten Gründen auf Null gesetzt.  $v_{\text{norm},x}$  und  $v_{\text{norm},y}$  erhalten den Wert  $v_{\text{norm},x} = v_{\text{norm},y} = v_{S,\text{max}} = A2\pi\nu$ . Dies entspricht dem Betrag der maximalen Schalengeschwindigkeit. Das Vorzeichen richtet sich nach der Position der Scheibe in der Schale und wird so gewählt, dass sich die Scheibe nach dem Stoß mit dem Rand ins Innere der Schale bewegt. Mit  $v_x = v_{\text{norm},x} + v_{\text{tang},x} = v_{\text{norm},x}$  (analog für die y-Komponente) und  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  hat die Scheibengeschwindigkeit nach der Durchführung eines solchen Randstoßes einen Betrag von  $|\vec{v}| = \sqrt{2}A2\pi\nu$ . Die Belegung der Komponenten  $v_{\text{norm},x}$  und  $v_{\text{norm},y}$  mit  $\pm A2\pi\nu$  erfolgt aufgrund der Tatsache, dass die Ablösung der Scheibe vom Rand der Schale instantan mit dem Stoß und somit zu unbestimmten Phasen der Schalenbewegung erfolgt. Diese Art der Stoßbehandlung gewährleistet in jedem Fall eine Verhinderung des inelastischen Kollapses. Ein Scheiben-Rand-Stoß unter den hier diskutierten Bedingungen wird im Folgenden als Katapult bezeichnet.

Aus diesen Überlegungen wird ersichtlich, dass sich die Scheiben  $k$  mit  $|\vec{v}_k = 0|$  zwar in beliebiger Nähe des Randes aufhalten können, jedoch nicht mit ihm in Kontakt sein können und es somit für sie nicht möglich ist, den Abstand  $d_Z = 14,0$  cm vom Schalenzentrum zu haben. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Scheiben einen Durchmesser von  $d = 1,0$  cm haben und der Schalenradius  $R = 14,5$  cm beträgt. Es stellt sich also die Frage, warum die Scheiben die Geschwindigkeit Null gerade in unmittelbarer Nähe des Randes bevorzugt annehmen.

### Energietransfer bei Scheiben-Rand-Stößen

Wie in Abschnitt 5.2 aufgeführt, verlieren die Scheiben bei einem Stoß mit dem Rand der Schale vollständig ihre Bewegungsenergie in tangentialer Richtung. Um Aufschluss darüber zu erhalten, ob der Rand den Scheiben im Mittel mehr Energie zuführt oder entzieht, wird  $\vec{v}_{k,\text{vor}}^2$  mit  $\vec{v}_{k,\text{nach}}^2$  verglichen. Dabei steht  $\vec{v}_{k,\text{vor}}^2$  für die quadrierte Geschwindigkeit der Scheibe  $k$ , die sich unmittelbar vor einem Stoß mit dem Rand der Schale befindet.  $\vec{v}_{k,\text{nach}}^2$  bezeichnet die quadrierte Geschwindigkeit, mit der sie die Scheibe  $k$  nach dem Randstoß wieder in Richtung des Schaleninneren bewegt. Wir betrachten die Differenz  $E_{D,k} = \vec{v}_{k,\text{nach}}^2 - \vec{v}_{k,\text{vor}}^2$ . Dabei steht  $E_{D,k}$  als Maß für die Energiedifferenz der Scheibe  $k$  vor und nach dem Stoß mit dem Rand der Schale.  $E_{D,k}$  ist negativ, wenn der Rand der Scheibe durch einen Stoß Energie entzieht und positiv, wenn der Scheibe dadurch Energie zugeführt wird.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 E_{D,k} &= \vec{v}_{k,\text{nach}}^2 - \vec{v}_{k,\text{vor}}^2 \\
 &= v_{k,\text{nach},\text{norm}}^2 + v_{k,\text{nach},\text{tang}}^2 - (v_{k,\text{vor},\text{norm}}^2 + v_{k,\text{vor},\text{tang}}^2) \\
 &= v_{k,\text{nach},\text{norm}}^2 - v_{k,\text{vor},\text{norm}}^2 - v_{k,\text{vor},\text{tang}}^2 \quad (\text{vgl. Abschn. 5.2}) \\
 &= -v_{k,\text{vor},\text{tang}}^2 \quad (\text{vgl. Abschn. 5.2, } \alpha_D = 1).
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Da  $v_{k,\text{vor},\text{tang}}^2$  stets positiv ist, kann einer Scheibe unter den hier diskutierten Bedingungen durch einen gewöhnlichen Stoß mit dem Rand keine Energie zugeführt werden. Der Energieverlust nach einem Randstoß ist umso höher, je höher der Anteil der tangentialen Geschwindigkeit der Scheibe an der absoluten Geschwindigkeit ist. Der Anteil der tangentialen Geschwindigkeit wiederum hängt von dem Winkel  $\beta$  zwischen dem Lot des Kontaktpunktes von Scheibe und Rand und der Richtung der absoluten Geschwindigkeit der Scheibe vor dem Stoß ab. Für  $\beta = 0$  ist  $v_{k,\text{vor},\text{tang}} = 0$  und der Stoß erfolgt vollständig elastisch ohne Energieverlust. Mit wachsendem  $\beta$  wächst der Anteil der tangentialen Geschwindigkeit und somit auch der Energieverlust nach einem Stoß mit dem Rand der Schale. Wenn jedoch das Katapult zum Einsatz kommt, ist die Geschwindigkeit der Scheibe vor dem Stoß sehr gering, während sie nach dem Stoß  $|\vec{v}_k| = \sqrt{2A_2\pi\nu}$  beträgt. Der Scheibe wird also Energie zugeführt. Messungen mit den hier diskutierten Parametern haben jedoch ergeben, dass das Katapult im Mittel nur bei einem von 56215 Stößen einer Scheibe gegen den Rand zum Einsatz kommt.

Abbildung 5.14 zeigt ein normiertes Histogramm für den Wert der Energiedifferenz  $E_D$ . Dazu werden über einen bestimmten Zeitraum alle Scheiben in Betracht gezogen, die gegen den Rand der Schale stoßen. Die Verteilung zeigt ein absolutes Maximum beim ersten Intervall für negative Werte von  $E_D$  und fällt für kleiner werdende Werte von  $E_D$  ab. Dieser Teil der Verteilung repräsentiert die Randstöße, bei denen das Katapult nicht zum Einsatz kommt. Im positiven



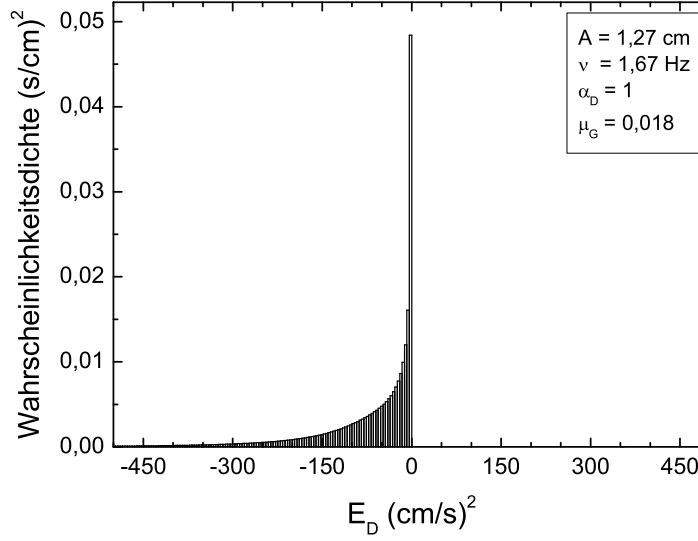


Abbildung 5.14: Histogramm der Differenz der quadrierten Geschwindigkeit einer Scheibe vor und nach dem Stoß gegen den Rand der Schale. Die Stöße in diesem System sind vollständig elastisch ( $\alpha_D = 1$ ), und der Gleitreibungskoeffizient hat den Wert  $\mu_G = 0,018$ . Die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ), die Amplitude  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

Bereich von  $E_D$  ist nur bei  $E_D = (354,443 \pm 2,67)$  cm/s<sup>2</sup> ein von Null verschiedener Wert für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu verzeichnen. Aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeit für den Einsatz des Katapults ist dieser Wert mit  $5,77 \cdot 10^{-6}$  in Abbildung 5.14 jedoch nicht auflösbar. Der Wert von  $E_D = (354,443 \pm 2,67)$  cm/s<sup>2</sup> resultiert aus der absoluten Geschwindigkeit  $|\vec{v}_k| = \sqrt{2}A2\pi\nu = 18,85$  cm/s einer Scheibe nach dem Stoß mit dem Rand bei Benutzung des Katapults für die hier diskutierten Werte der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\nu$  ( $A = 1,27$  cm,  $\nu = 1,67$  Hz). Im Falle des Katapults berechnet sich der Wert  $E_{D,k}$  der Scheibe  $k$  zu

$$E_{D,k} = (\sqrt{2}A2\pi\nu)^2 - |\vec{v}_{k,\text{vor}}|^2. \quad (5.47)$$

Um nun endgültig eine Aussage darüber treffen zu können, ob der Rand der Schale dem System im Mittel Energie zuführt oder entzieht, betrachten wir den Mittelwert  $\langle E_D \rangle$  für die hier diskutierten Parameter ( $N = 335$ ,  $\alpha_D = 1$ ,  $\mu_G = 0,018$ ). Dieser ergibt sich zu  $\langle E_D \rangle = (-77,02 \pm 0,01)$  cm/s<sup>2</sup> und zeigt somit, dass der Rand dem System mittels Scheiben-Rand-Stößen im Mittel mehr Energie entzieht als zuführt.

Diese Erkenntnis erklärt die Position des absoluten Maximums in der Ver-

teilung der Scheiben  $k$  mit  $|\vec{v}_k| = 0|$ . Die Energiereduzierung der Scheiben durch einen Stoß gegen den Rand der Schale äußert sich in einer Verminderung der Scheibengeschwindigkeit. Dies hat wiederum zur Folge, dass die nach dem Stoß angreifende Gleitreibungskraft der Scheibe die restliche Energie entzieht, sodass diese dann relativ zur Schale die Geschwindigkeit Null besitzt. Aus diesem Grund hat das absolute Maximum der Verteilung für die Scheiben mit  $|\vec{v}_k| = 0$  (Abb. 5.13 (a)) die gleiche Lage wie das für die stoßenden Scheiben (Abb. 5.13 (c)). Die Positionsabweichungen der beiden weiteren Maxima ergeben sich aus folgender Tatsache: Wie zuvor gezeigt, wird der Geschwindigkeitsbetrag einer Scheibe durch einen Scheiben-Rand-Stoß reduziert. Demgegenüber sind Energieverlust und Energiegewinn einer Scheibe bei einem Scheiben-Scheiben-Stoß gleichberechtigt. Somit führt ein Maximum für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Aufenthaltsortes stoßender Scheiben (Abb. 5.13 (c)) nicht unbedingt zu einem Maximum in der Verteilung für die Abstände der Scheiben  $k$  mit  $|\vec{v}_k| = 0|$ .

## 5.5 Bestimmung des Restitutionskoeffizienten $\alpha_D$ und des Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G$

In diesem Abschnitt werden die Werte für den Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  und den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  bestimmt, um sodann die numerischen Daten mit den experimentell gewonnenen Ergebnissen vergleichen zu können. Dazu werden aus der Simulation hervorgehende Geschwindigkeitsverteilungen mit verschiedenen Werten für  $\alpha_D$  und  $\mu_G$  mit einer experimentellen Verteilung für Glaskugeln ( $d = 1,0$  cm) verglichen. Der Vergleich findet für die Füllhöhe  $\mu = 0,4$  statt, die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz. Die Wahl dieser Füllhöhe erfolgt aufgrund der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Gründe. Die Amplitude und die Frequenz richten sich nach den experimentell zur Verfügung stehenden Daten. Als Maß für die Ähnlichkeit von numerischer und experimentell gewonnener Geschwindigkeitsverteilung wird die quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  und des Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  bestimmt. Die Werte für  $\alpha_D$  und  $\mu_G$ , bei denen  $\chi^2$  minimal ist, werden für alle durchgeführten Simulationen eingestellt.

Abbildung 5.15 (a) zeigt die quadratische Abweichung  $\chi^2$  in Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  für verschiedene Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$ . Der Restitutionskoeffizient  $\alpha_D$  wird von 0,65 bis 0,95 in Schritten von 0,05 variiert, wobei der Gleitreibungskoeffizient  $\mu_G$  jeweils von 0,002 bis 0,012 in Schritten von 0,002 variiert wird. Diese Darstellung gibt zunächst einen groben Überblick über die Güte der Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation. In Abbildung 5.15 (b) wird der Bereich für den Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  von 0,85 bis 0,89 in Schritten von 0,001 genauer dargestellt. Dabei wird der Gleitreibungs-

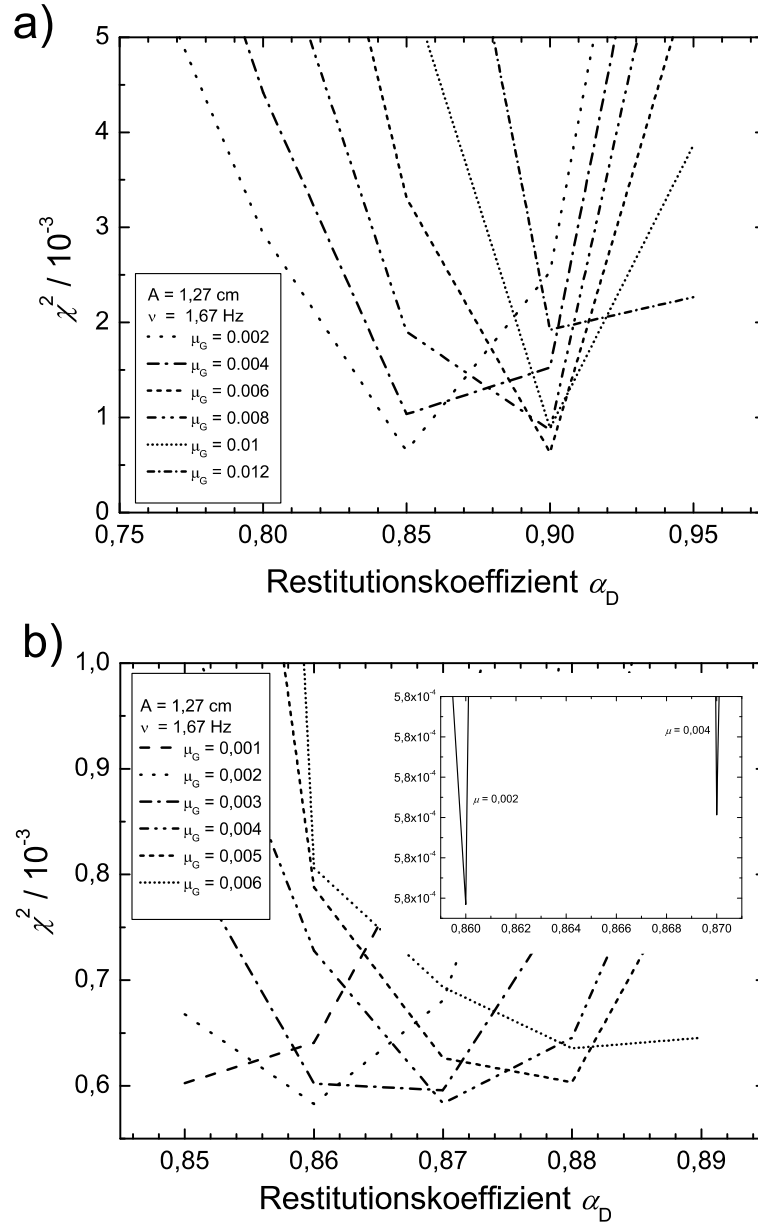


Abbildung 5.15: a) Quadratische Abweichung  $\chi^2$  zwischen Simulation und Experiment in Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  und der Gleitreibung  $\mu_G$ . Die Füllichte beträgt  $\mu = 0,4$  ( $N = 335$ ), die Amplitude  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz. b) Zoom in den Bereich minimaler  $\chi^2$ -Werte.

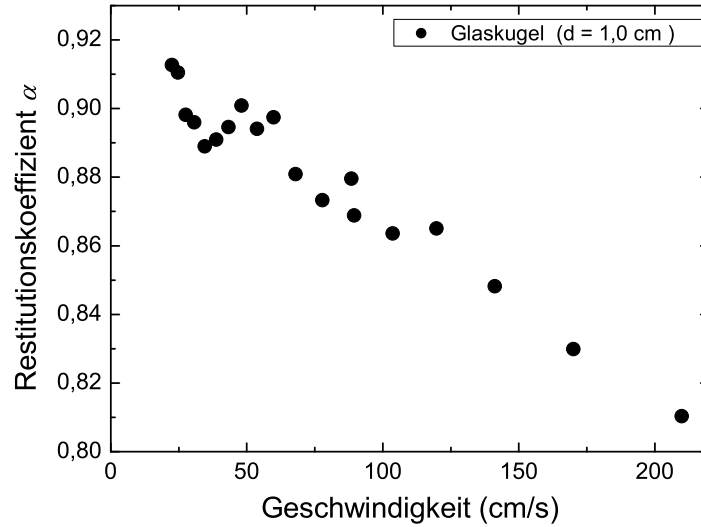


Abbildung 5.16: Experimentelle Abhängigkeit des Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D$  von der Aufprallgeschwindigkeit einer Glaskugel ( $d = 1,0$  cm).

koeffizient  $\mu_G$  jeweils um 0,001 von 0,001 bis 0,006 variiert. Das Minimum für die quadratische Abweichung  $\chi^2$  findet sich mit  $\chi^2 = 0,00058$  bei dem Restitutionskoeffizienten  $\alpha_D = 0,86$  und dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G = 0,002$ . Diese Werte werden daher im Folgenden für alle Simulationdurchführungen eingestellt.

Experimentelle Messungen des geschwindigkeitsabhängigen Restitutionskoeffizienten einer Glaskugel des Typs 5 ( $d = 1,0$  cm) ergeben einen Mittelwert von  $\alpha_D = 0,879 \pm 0,026$ . Der entsprechende Rollreibungskoeffizient bestimmt sich zu  $\mu_G = 0,0036 \pm 0,003$  und zu  $\mu_G = 0,0012 \pm 0,002$  für eine Stahlkugel des Typs 19 ( $d = 1,0$  cm). Der Restitutionskoeffizient wird anhand von Fallexperimenten und Messungen der Zeiten zwischen zwei Stößen mit einer Marmorunterlage bestimmt.  $\alpha_D$  berechnet sich dann aus dem Quotient zweier aufeinander folgender Zeiten zwischen zwei Stößen mit der Unterlage. Abbildung 5.16 zeigt den Wert des Restitutionskoeffizienten für Geschwindigkeiten der Glaskugel ( $d = 1,0$  cm) bis zu 210 cm/s. Um die Gleitreibungskoeffizienten zu bestimmen, werden die Zeiten gemessen, die die Kugeln benötigen, um eine schiefe Ebene aus Glas hinab zu rollen. Der Gleit- bzw. Rollreibungskoeffizient berechnet sich dann zu

$$\mu_G = \frac{5}{7} \sin(\phi) - \frac{2S}{gt^2}. \quad (5.48)$$

Dabei ist  $S$  die Länge der schiefen Ebene,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $t$  die Zeit,

die die Kugel benötigt, um die Ebene hinab zu rollen und  $\phi$  der Winkel zwischen schiefer Ebene und der Horizontalen. Dabei wird angenommen, dass eine reibungsfrei rollende Kugel auf einer schiefen Ebene mit  $a = \frac{5}{7}\sin(\phi)g$  entlang der Bewegungsrichtung beschleunigt. Es sei darauf hingewiesen, dass die hier bestimmten Werte für  $\alpha_D$  und  $\mu_G$  auf alle in den Simulationen verwendeten Scheibentypen angewendet werden.

## 5.6 Vergleich zwischen Simulation und Experiment

Im Folgenden werden die in Kapitel 4 beschriebenen Ergebnisse des Experiments mit denen der Simulation verglichen. Dabei wird die Frage diskutiert, ob das System rollender Kugeln durch das modifizierte System rutschender Scheiben beschrieben werden kann. Zu Beginn findet ein visueller Vergleich zwischen den in Abschnitt 4.1 vorgestellten Phasen des Experiments zu den entsprechenden Verhaltensweisen der simulierten Scheiben statt. Anschließend werden die Übergänge von der plastischen in die fluidartige Phase sowie von der fluidartigen in die festkörperartige Phase miteinander verglichen. Dabei entspricht die in der Simulation verwendete Methode der jeweiligen Methode im Experiment. Weiterhin wird geprüft, ob die numerischen Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  mit den experimentellen Ergebnissen in Einklang stehen und ebenfalls zur Charakterisierung der Kristallisation herangezogen werden können (vgl. Unterabschn. 4.2.3). Außerdem werden die in Abschnitt 4.3 dargestellten Ergebnisse zum horizontalen Paranusseffekt und seiner Umkehrung mit der Simulation verglichen, erweitert und diskutiert.

### 5.6.1 Die drei Phasen

Wie schon im Experiment lässt sich auch das Verhalten der Scheiben in der Simulation in drei Kategorien einteilen. In Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  und/oder der Amplitude  $A$  befinden sich die Scheiben in der plastischen, der fluidartigen oder der festkörperartigen Phase (vgl. Abschn. 4.1).

Die plastische Phase in der Simulation unterscheidet sich dahingehend vom Experiment, dass die Scheiben im Zentrum der Schale einen Cluster bilden, der lokal eine höhere Ordnung als im Experiment aufzeigt (Abb. 5.17). Desweiteren weichen einzelne Scheiben von der in Unterabschnitt 4.1.1 beschriebenen charakteristischen Bewegungsform der Kugeln in der plastischen Phase ab. Die den Cluster umgebenden Scheiben befinden sich nicht auf einer durch die Oszillation der Schale angeregten Kreisbahn, sondern zeigen eine ungeordnete, gasartige Bewegung im Raum zwischen dem zentralen Cluster und dem Rand der Schale.

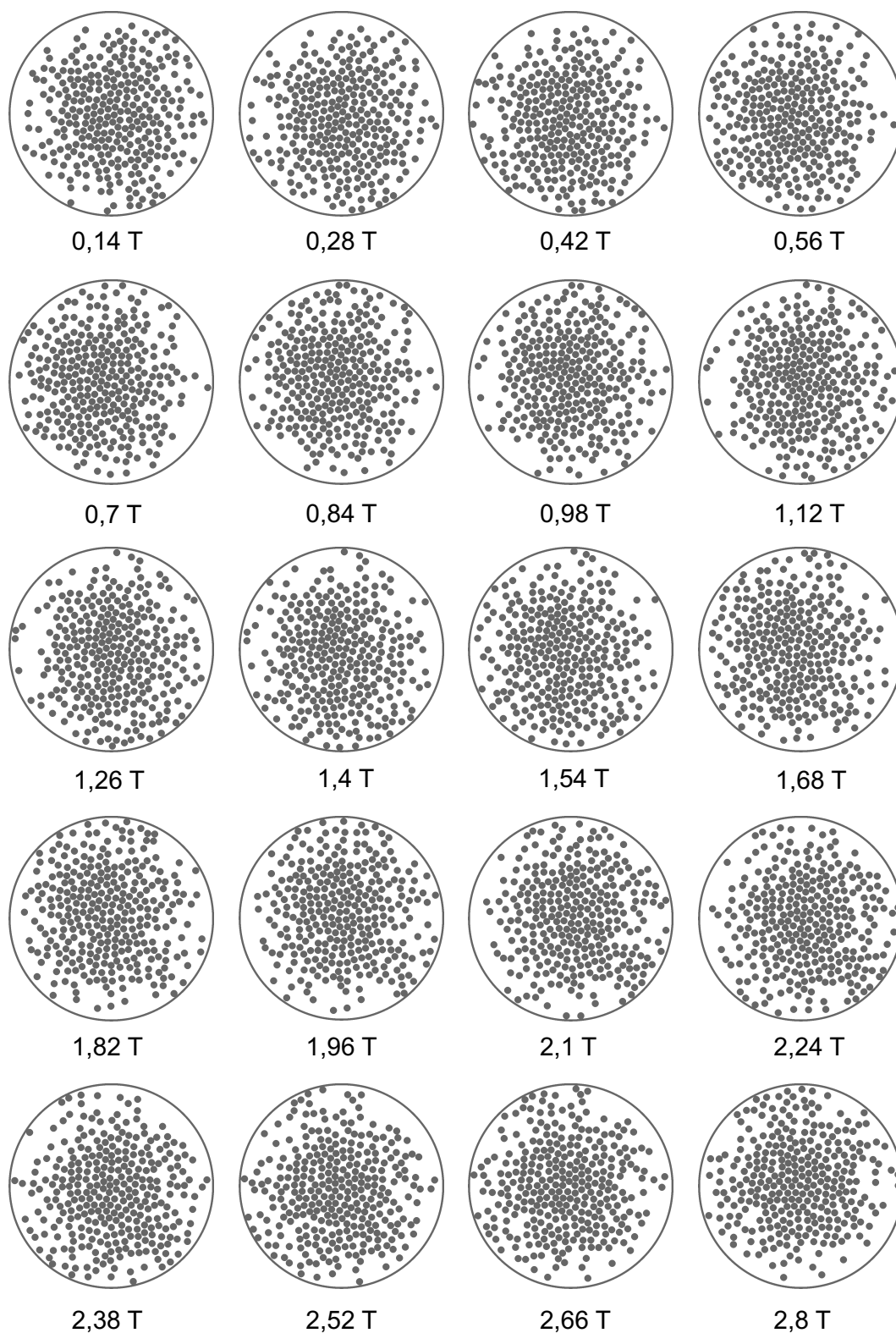


Abbildung 5.17: Bilderserie von 300 Scheiben ( $\mu = 0,36$ ,  $d = 1,0$  cm) in der plastischen Phase der Simulation. Die Bilder sind mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms aufgenommen.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz (vgl. Abb. 4.1).

Nur die Scheiben, die an dem Clusterprozess beteiligt sind, verhalten sich analog zu der in Unterabschnitt 4.1.1 des vorangegangenen Kapitels beschriebenen Bewegungsform der Kugeln. Demnach kann in der Simulation eine Koexistenz von der plastischen und einer gasartigen Phase beobachtet werden, während die unterschiedlichen Phasen des Experiments stets alleine auftreten.

In der fluidartigen Phase verhält sich der Cluster in der Simulation ähnlich zu dem Kugelcluster im Experiment (vgl. Unterabschn. 4.1.2). Jedoch zeigt sich in der Simulation die Tendenz der Scheiben, sich in einem Cluster mit hexagonaler Struktur anzuordnen, was im Experiment erst bei dem Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zu beobachten ist. Weiterhin ist der Anteil der Teilchen, die in der fluidartigen Phase an dem Clusterprozess beteiligt sind, deutlich geringer als im Experiment. Während in der fluidartigen Phase des Experiments nahezu alle Kugeln einen Cluster bilden, sind in der Simulation einige Scheiben zu beobachten, die sich von dem Cluster lösen und sich unabhängig von diesem durch die Schale bewegen (Abb. 5.18).

In der festkörperartigen Phase der Simulation sind im Vergleich zum Experiment keine Unterschiede beobachtbar. Die Bewegungsform der Scheiben ist nahezu identisch zu dem in Unterabschnitt 4.1.3 beschriebenen Verhalten rollender Kugeln in dieser Phase (Abb. 5.19).

Bei Clusterprozessen in der Simulation zeigen die Scheiben grundsätzlich die Tendenz, sich in einer hexagonalen Struktur anzuordnen, die mit wachsender Füll-dichte  $\mu$  immer stärker ausgebildet wird. Ein möglicher Grund für die Scheiben, sich auch bei niedrigen Füll-dichten in einer hexagonalen Struktur anzuordnen, ist die Präzision der Scheibendurchmesser. Während die Scheiben einer monodispersen Scheibenmonolage exakt identisch sind, weisen die Kugeln im Experiment sehr geringe Abweichungen in ihren Durchmessern auf und weichen eventuell geringfügig von der Kugelform ab (vgl. Tab. 3.1). Eine Anordnung der Kugeln in einer hexagonalen Struktur, insbesondere in der hexagonal dichtesten Packung, wird durch Unregelmäßigkeiten im Durchmesser der Kugeln erschwert bzw. verhindert. Weiterhin werden in der Simulation rotationsfreie Scheiben betrachtet. Auch diese Eigenschaft der Scheiben begünstigt eine zeitlich stabile Anordnung dieser in einer hexagonalen Struktur. Durch die Rotation der Kugeln im Experiment und die dadurch wirkenden Kräfte zweier oder mehrerer in Kontakt miteinander stehender Kugeln können bereits bestehende Strukturen aufgebrochen werden. Somit ist es für die Scheiben der Simulation prinzipiell einfacher, sich in einer hexagonalen Struktur anzuordnen.

### 5.6.2 Fluidisierung

Um zu untersuchen, wie das System rutschender Scheiben von der plastischen in die fluidartige Phase übergeht, wird analog zum Experiment der in Unterab-

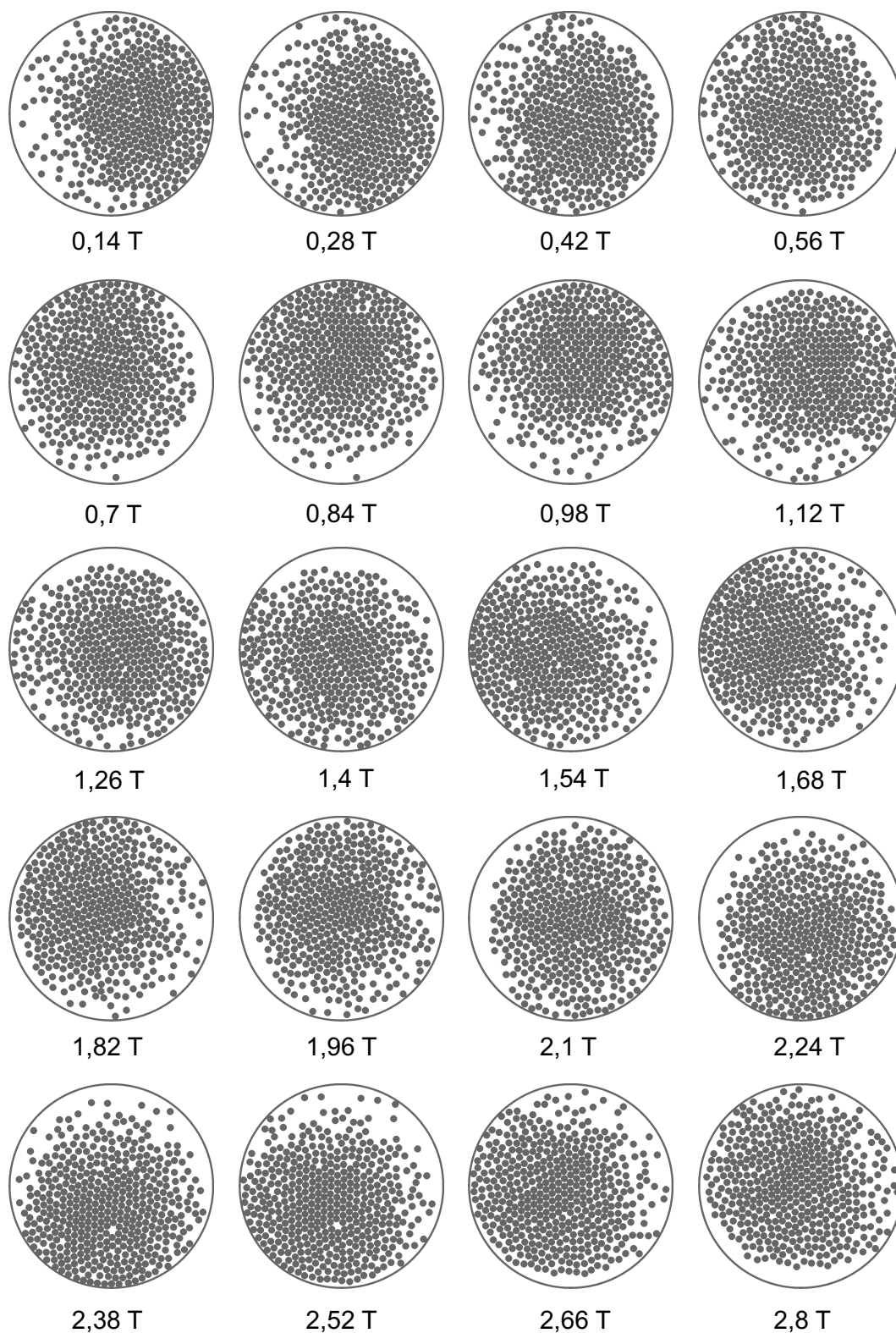


Abbildung 5.18: Bilderserie von 400 Scheiben ( $\mu = 0,48$ ,  $d = 1,0$  cm) in der fluid-artigen Phase der Simulation. Die Bilder sind mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms aufgenommen.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz (vgl. Abb. 4.2).



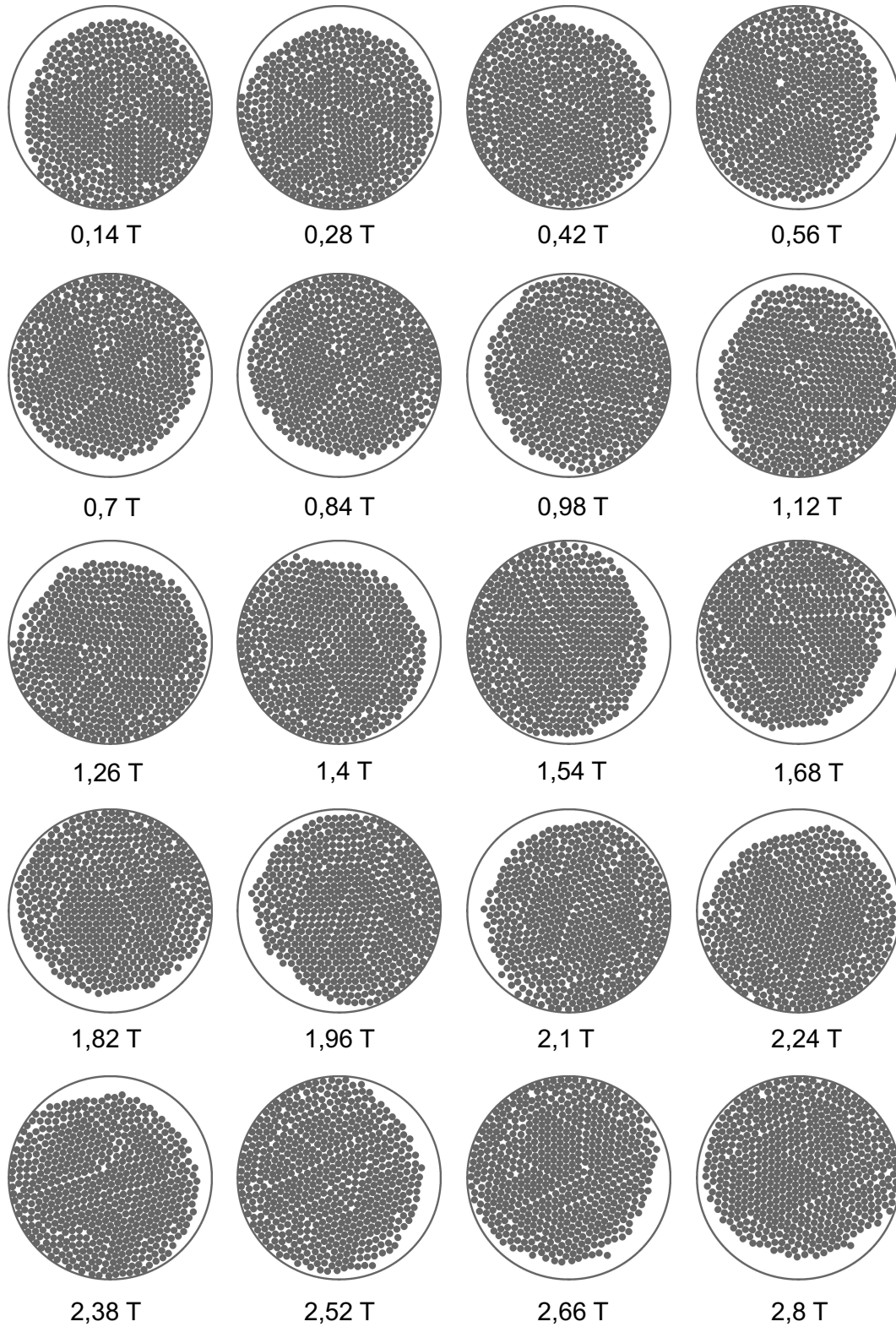


Abbildung 5.19: Bilderserie von 580 Scheiben ( $\mu = 0,69$ ,  $d = 1,0$  cm) in der festkörperartigen Phase der Simulation. Die Bilder sind mit einem zeitlichen Abstand von 83,5 ms aufgenommen.  $T = 1/\nu$  bezeichnet die Periodendauer der Schwenkbewegung. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz (vgl. Abb. 4.3).

schnitt 4.1.4 beschriebene Ordnungsparameter definiert. Dieser wird in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für eine feste Amplitude  $A$  betrachtet. Um die Werte des Ordnungsparameters in Abhängigkeit der Füllichte zu bestimmen, werden Bitmaps aus der Animation der Simulation extrahiert, die das System rutschender Scheiben in der Aufsicht zeigen (vgl. Abb. 5.17, 5.18 und 5.19). Dadurch wird die Anwendung der zuvor für das Experiment benutzten Auswertungsprogramme ermöglicht (vgl. Unterabschn. 4.1.4). Auf eine Positionsbestimmung der Scheiben mittels einer Korrelationstechnik (vgl. Abschn. 3.4) kann in der Simulation jedoch verzichtet werden. Die Positionen aller Scheiben liegen zu jedem beliebigen Zeitpunkt vor. Der für den experimentellen Übergang verwendete Ordnungsparameter  $\alpha$  beschreibt die häufigste im System vorkommende Voronoi-Zellengröße (vgl. Unterabschn. 4.1.4). Für die Simulation wird dieser mit  $\alpha_{\text{sim}}$  bezeichnet und ist in Abbildung 5.20 gegen die Füllichte  $\mu$  aufgetragen. In der Simulation ist kein sprunghafter Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase oder umgekehrt zu verzeichnen. Für wachsende Füllichten  $\mu$  mit  $0,35 < \mu < 0,46$  nimmt der Ordnungsparameter linear ab und erreicht bei  $\mu = 0,47$  ein Minimum mit  $\alpha_{\text{sim}} = 1,002 \text{ cm}^2$ . Für größere Füllichten  $\mu$  wird ein Wert von  $\alpha = 1,03 \text{ cm}^2$  nicht mehr überschritten. Das Minimum mit  $\alpha_{\text{sim}} = 1,002 \text{ cm}^2$  sagt aus, dass die Scheiben in dieser Phase analog zum Experiment noch nicht die hexagonal dichteste Kugelpackung angenommen haben. Der zugehörige Wert für die Voronoi-Zellengröße berechnet sich zu

$$\alpha_{\text{hcp}} = 2\sqrt{3}r^2 = 0,866 \text{ cm}^2, \quad (5.49)$$

wenn  $r = 0,5 \text{ cm}$  den Radius der Scheiben bezeichnet.

Wie im Experiment erfolgt auch in der Simulation die Erhöhung der Füllichte  $\mu$  dynamisch (vgl. Abschn. 3.6). Bei jeder Erhöhung der Füllichte  $\mu$  werden die Endpositionen und die Geschwindigkeiten der Scheiben der vorangegangenen Messung als Startwerte benutzt. Die neuen Scheiben erhalten zufallsverteilte Positionen und Geschwindigkeiten. Da der hier dargestellte Übergang von der plastischen Phase der Simulation in die fluidartige Phase stark von dem im Experiment abweicht (vgl. Unterabschn. 4.1.4), kann die Simulation an dieser Stelle nicht für einen Vergleich mit dem Experiment herangezogen werden. Die vereinfachte Darstellung rollender Kugeln als modifiziert rutschende Scheiben ist nicht ausreichend, um den Prozess der Fluidisierung in Hinsicht auf das Experiment beschreiben zu können. Möglicherweise verhindert der in der plastischen Phase der Simulation koexistierende gasartige Zustand der äußeren Scheiben einen sprunghaften Übergang in die fluidartige Phase.

### 5.6.3 Kristallisation

Abbildung 5.21 zeigt den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase der Simulation. Wie zuvor beschrieben, wird auch hier analog zum Ex-

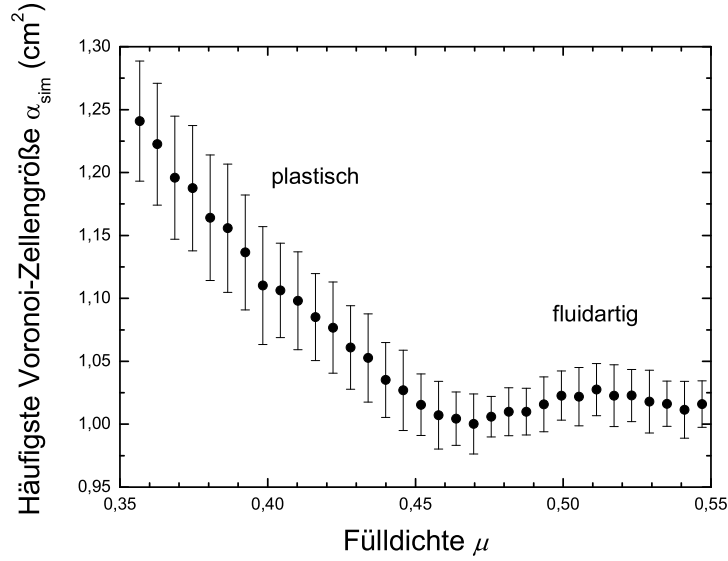


Abbildung 5.20: Verhalten des Ordnungsparameters  $\alpha_{sim}$ , d. h. der häufigsten Voronoi-Zellengröße in Abhängigkeit der Füll-dichte  $\mu$ . Jeder Punkt repräsentiert die Analyse von 200 Aufnahmen mit einer zeitlichen Verzögerung von 0,5 s. Der Scheibendurchmesser beträgt  $d = 1,0$  cm, die Amplitude  $A = 2,22$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

periment der gleiche Ordnungsparameter für die Beschreibung des Phasenübergangs herangezogen. Der in Unterabschnitt 4.1.5 definierte Ordnungsparameter  $\beta = I_{n,max} - 1$  ist in Abhängigkeit der Füll-dichte  $\mu$  dargestellt und wird für die numerischen Daten mit  $\beta_{sim}$  bezeichnet. Auch in der Simulation ergibt sich der jeweilige Wert des Ordnungsparameters aus einer Fourieranalyse von 200 Aufnahmen, die aus der Animation der Simulation extrahiert werden. Tendenziell zeigt der Ordnungsparameter  $\beta_{sim}$  ein zum Experiment ähnliches Verhalten. Für die numerischen Daten der Simulation nimmt er für die fluidartige Phase jedoch Werte an, die im Mittel um eins höher sind als die entsprechenden experimentellen Werte (vgl. Abb. 4.16). Dies ist mit der zuvor beschriebenen Tendenz der Scheiben, sich beim Clustern in einer hexagonalen Struktur anzuordnen, zu begründen. Auch hier bestimmt sich die kritische Füll-dichte  $\mu_{c1,sim}$  für die Kristallisation der Scheiben aus dem Schnittpunkt einer Konstanten mit dem Wert des Mittelwertes von  $\beta_{sim}$  in der fluidartigen Phase und einer linearen Regression an die Daten der festkörperartigen Phase. Die Datenpunkte zu den Füll-dichten  $\mu$  mit  $0,55 < \mu < 0,57$  werden der festkörperartigen Phase zugeschrieben, da sie auffällig von den um einen Mittelwert schwankenden Werten der fluidartigen Phase abweichen. Auf diese Weise berechnet sich der Wert der kritischen Füll-dichte

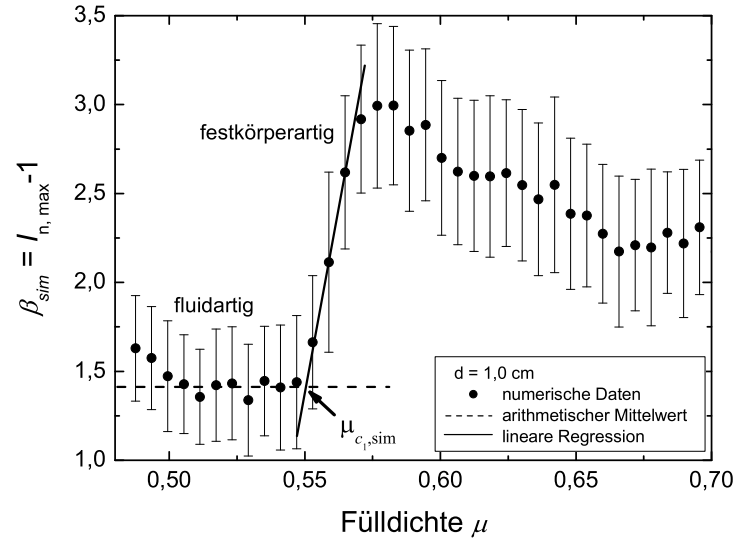


Abbildung 5.21: Abhängigkeit des Ordnungsparameters  $\beta_{sim}$  von der Füll-dichte  $\mu$ , für die Scheiben der Simulation ( $d = 1,0$  cm). Jeder Punkt repräsentiert die Analyse von 200 Aufnahmen mit einer zeitlichen Verzögerung von 16,7 ms. Die Amplitude beträgt  $A = 2,22$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz. Die kritische Füll-dichte  $\mu_{c1, sim} = 0,55 \pm 0,01$  für den Phasenübergang berechnet sich aus dem Schnittpunkt einer linearen Regression der Daten mit  $0,55 < \mu < 0,57$  und dem Mittelwert der Daten mit  $\mu < 0,55$ .

zu  $\mu_{c1, sim} = 0,55 \pm 0,01$ . Im Gegensatz zu dem experimentellen Übergang ist dies ein um ca. 5 % kleinerer Wert (vgl. Abb. 4.16 und 4.17) als der in Unterabschnitt 4.1.5 berechnete ( $\mu_{c1} = 0,58$ ).

Abschließend werden die numerisch bestimmten Werte für den Übergang von der plastischen in die fluidartige und von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zusammen mit den experimentellen Ergebnissen dargestellt. In Abbildung 5.22 ist das Phasendiagramm der genannten Übergänge für die kritischen Füll-dichten in Abhängigkeit der Amplitude dargestellt. Die gefüllten Symbole repräsentieren die experimentellen Ergebnisse und die zwei offenen Symbole die entsprechenden Werte der numerischen Simulation für die Amplitude  $A = 2,22$  cm. Das Dreieck ( $\triangle$ ) zeigt die kritische Füll-dichte für den Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase. Obwohl die Art des Übergangs im Experiment und in der Simulation unterschiedlich ist, findet bei diesem Wert der untersuchte Phasenübergang statt, weshalb er zum Vergleich dargestellt wird (vgl. Unterabschn. 5.6.2). Der Kreis ( $\circ$ ) zeigt die Füll-dichte für den numerischen Übergang von der

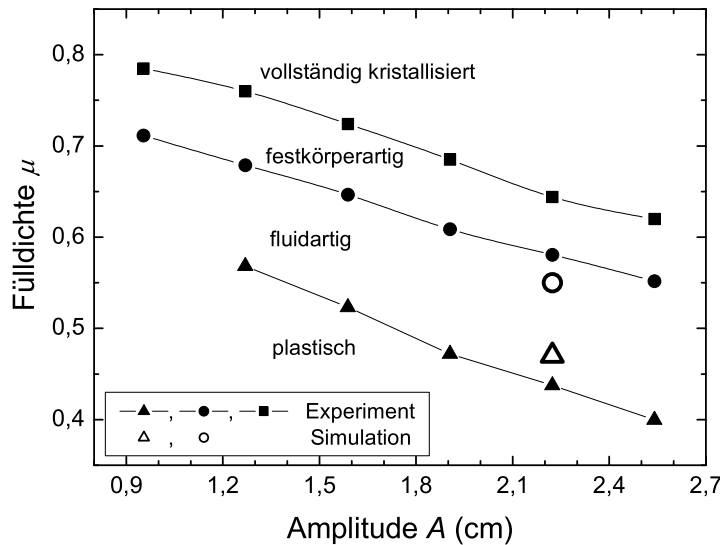


Abbildung 5.22: Phasendiagramm für die kritischen Füllichten  $\mu_{pf}$  und  $\mu_{cl}$  in Abhängigkeit der Amplitude  $A$ . Die offenen Symbole ( $\circ$ ,  $\triangle$ ) repräsentieren die Werte der numerischen Simulation, die schwarzen Symbole ( $\blacktriangle$ ,  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ) zeigen die experimentellen Werte für die Übergänge in die jeweiligen Phasen.

fluidartigen in die festkörperartige Phase.

#### 5.6.4 Geschwindigkeitsverteilungen

Hier werden die Entwicklungen numerisch und experimentell bestimmter Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  miteinander verglichen und diskutiert. Um einen Vergleich zu den in Abschnitt 4.2 des Kapitels der experimentellen Ergebnisse vorgestellten Verteilungen zu ermöglichen, werden numerische Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  mit  $0,35 \leq \mu \leq 0,7$  bestimmt. Die in der Simulation verwendeten Scheiben haben einen Durchmesser von  $d = 1,0$  cm, der somit dem der Glaskugeln des Typs 5 im Experiment entspricht.

In Abbildung 5.23 sind die numerischen Geschwindigkeitsverteilungen für die Amplitude  $A = 1,27$  cm in einem Offset-Diagramm dargestellt. Dabei wird die Füllichte von  $\mu = 0,35$  (unten) bis  $\mu = 0,7$  (oben) variiert. Die Schrittweite beträgt jeweils  $\mu = 0,01$ . Auch hier ist mit steigender Füllichte  $\mu$  ein deutlicher Übergang von zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu einem zentra-

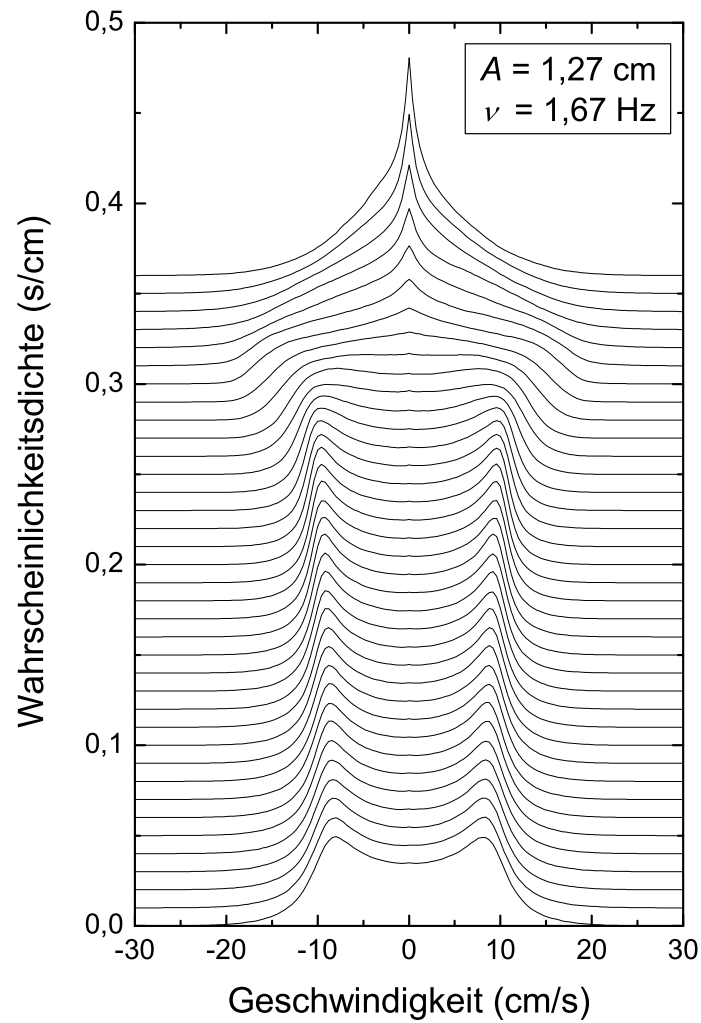


Abbildung 5.23: Normierte Geschwindigkeitsverteilungen der horizontalen Komponente der Scheiben in der Simulation ( $d = 1,0$  cm) für verschiedene Fülldichten  $\mu$ . Die Fülldichte wird von 0,35 (unten) bis 0,7 (oben) in Schritten von 0,01 variiert. Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm und die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz.

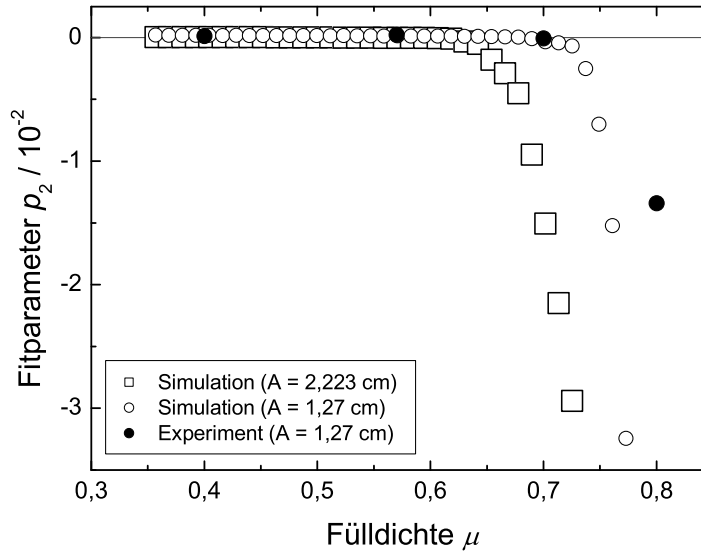


Abbildung 5.24: Wert des Fitparameters  $p_2$  in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für das Experiment ( $\bullet$ ) und die Simulation ( $\circ$ ,  $\square$ ).

len Maximum zu sehen. Bei der Füllichte  $\mu = 0,4$ , d. h. in der plastischen Phase verhält sich die Geschwindigkeitsverteilung nahezu identisch zu dem in Abschnitt 4.2 vorgestellten experimentellen Ergebnis. Während sich jedoch im Experiment die Lage der Maxima mit wachsender Füllichte  $\mu$  zu kleineren Geschwindigkeitsbeträgen verschiebt, bevor der Übergang zu einem Maximum stattfindet, zeigt die Simulation ein entgegengesetztes Verhalten (Abb. 5.23). Bevor der angesprochene Übergang zu verzeichnen ist, verschiebt sich die Lage der Maxima mit wachsender Füllichte  $\mu$  zunächst um etwa 1 % zu größeren Geschwindigkeitsbeträgen. Daher ist die Übereinstimmung der Verteilungen in der fluidartigen Phase ( $\mu = 0,48$ ) nicht so gut wie in der plastischen Phase, weshalb die Anpassung der Parameter in Unterabschnitt 5.5 für die Füllichte  $\mu = 0,4$  erfolgte.

Um die kritische Füllichte  $\mu_{c,v,\text{sim}}$  für den numerischen Übergang von den zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu einem zentralen Maximum zu bestimmen, wird analog zu dem in Unterabschnitt 4.2.3 beschriebenen Verfahren vorgegangen. Gesucht ist auch hier die kritische Füllichte  $\mu$  für den Vorzeichenwechsel des Fitparameters  $p_2$  der Fitfunktion 4.24. In Abbildung 5.24 ist der Wert des Fitparameters  $p_2$  in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  für die Simulation ( $\circ$ ,  $\square$ ) und das Experiment ( $\bullet$ ) aufgetragen. Wie in Unterabschnitt 4.2.3 beschrieben und begründet, wird die kritische Füllichte  $\mu_{c,v}$  für den Vorzeichenwechsel des Fitparameters  $p_2$  durch Anpassung der Fitfunktion 4.28 an die experimentellen

Daten bestimmt. Auf die numerischen Daten ist diese Methode jedoch nicht anwendbar, da eine zufriedenstellende Anpassung der Fitfunktion nicht möglich ist. Der Grund dafür liegt in dem unterschiedlichen Verhalten der Kurven für den experimentellen und den numerischen Übergang. Der für hohe Füllichten  $\mu$  zu verzeichnende Abfall von  $p_2$  ist für die numerischen Daten deutlich stärker als für die experimentellen Daten. Demnach ist das zentrale Maximum der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung in der Simulation stärker ausgeprägt als im Experiment. Aus diesem Grund erfolgt die Bestimmung der kritischen Füllichte  $\mu_{c,v,sim}$  für den Vorzeichenwechsel des Fitparameters  $p_2$  für die numerischen Daten durch lineare Interpolation, was aufgrund der hohen Datendichte gerechtfertigt ist. Auf diese Weise bestimmt sich die kritische Füllichte zu  $\mu_{c,v,sim} = 0,684 \pm 0,004$ . Im Vergleich zu dem Wert des experimentellen Übergangs von  $\mu_{c,v} = 0,675 \pm 0,003$  ist dies eine gute Übereinstimmung. Die Abweichung zum Experiment beträgt nur ca. 1 %.

Eine mögliche Erklärung für das unterschiedliche Verhalten des Fitparameters  $p_2$  bei hohen Füllichten  $\mu$  ist darin zu finden, dass ein Ereignis-Dynamik orientierter Programmablauf das Verhalten von geclusterten Kugeln nicht hinreichend beschreiben kann. Dadurch, dass die Kontaktzeit während eines Stoßes zweier Teilchen als Null angenommen wird, werden Teilchen, die über einen bestimmten Zeitraum hinweg in Kontakt miteinander sind, numerisch durch eine Vielzahl von Stößen untereinander realisiert. Sobald das System Clusterzustände aufweist, überwiegt die Anzahl der Stöße zwischen zwei Teilchen in der Simulation gegenüber dem Experiment innerhalb eines betrachteten Zeitintervalls. Aufgrund des dissipativen Charakters der Teilchen-Stöße resultiert daraus ein höherer Anteil an dissipierter Energie in der Simulation im Vergleich zum Experiment. Dies wiederum führt dazu, dass die Scheiben in der Simulation kleinere Geschwindigkeitsbeträge als im Experiment annehmen. Für hohe Füllichten hat dies ein im Gegensatz zum Experiment schärferes Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen in den Geschwindigkeitsverteilungen zur Folge. Dieser Effekt ist umso deutlicher, je mehr Kugeln an dem Clusterprozess beteiligt sind. Auch das in diesem Kapitel vorgestellte TC-Modell zur Vermeidung dieses Effektes scheint nicht ausreichend zu sein, um einen Clusterprozess von Teilchen mit einem Ereignis-Dynamik orientierten Programmablauf zufriedenstellend darstellen zu können.

Weiterhin ist zu beachten, dass die Geschwindigkeiten der Teilchen im Experiment und in der Simulation auf unterschiedliche Weise bestimmt werden. In der Simulation stehen die Momentangeschwindigkeiten aller Scheiben zu jedem beliebigen Zeitpunkt zur Verfügung. Demgegenüber bestimmen sich die Geschwindigkeiten der Kugeln im Experiment aus der geradlinig zurückgelegten Strecke innerhalb der zwischen zwei Aufnahmen vergangen Zeit. Dadurch wird die Bewegung der Kugeln innerhalb des betrachteten Zeitintervalls linearisiert und die berechneten Geschwindigkeiten erscheinen kleiner als sie tatsächlich sind. Dieser Effekt ist umso stärker, je höher die Füllichte  $\mu$  ist. Denn die Anzahl der Stöße



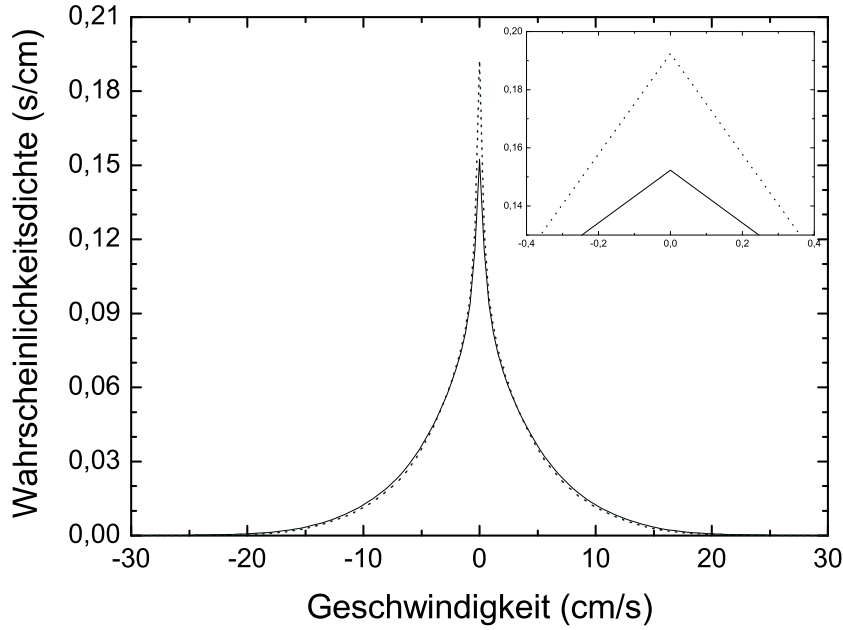


Abbildung 5.25: Normierte Geschwindigkeitsverteilungen der horizontalen Komponente der Scheiben der Simulation für die Momentangeschwindigkeiten der Scheiben (—) und für die innerhalb des Zeitintervalls von 16,7 ms zurückgelegte geradlinige Strecke (···). Die Amplitude beträgt  $A = 1,27$  cm, die Frequenz  $\nu = 1,67$  Hz und die Füllichte  $\mu = 0,8$  ( $N = 670$ ). Das Inset zeigt einen Zoom in den Bereich der Maxima beider Verteilungen.

innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, und somit die Abweichungen zu einer geradlinigen Bewegung der Kugel innerhalb dieses Intervalls, wächst mit der Füllichte  $\mu$ . Folglich erwartet man für die experimentellen Verteilungen höherer Füllichten  $\mu$  sogar ein schärferes Maximum und somit einen kleineren Wert für den Fitparameter  $p_2$  als für die entsprechenden numerischen Verteilungen. Abbildung 5.25 zeigt den Unterschied zwischen beiden Methoden. Die beiden überlagert dargestellten Verteilungen sind numerisch bestimmt. Der durchgezogene Verlauf zeigt die Verteilung der Momentangeschwindigkeiten der Scheiben. Der grau gepunktete Verlauf zeigt die entsprechende Verteilung nach Art der experimentellen Methode mit einem für das Experiment zutreffenden Zeitintervall von 0,0166 s. Wie erwartet, zeigt die Verteilung nach der experimentellen Methode ein schärferes Maximum bei kleinen Geschwindigkeiten als die Verteilung der Momentangeschwindigkeiten. In Abbildung 5.24 kann dieser Effekt jedoch nicht beobachtet werden. Bei hohen Füllichten ist der experimentelle Wert des Fitparameters  $p_2$  größer als der numerisch bestimmte. Die Probleme eines Ereignis-Dynamik orientierten Programmablaufs bei der Beschreibung von Clusterzuständen scheinen gegenüber den unterschiedlichen Methoden zur Be-

stimmung der Teilchengeschwindigkeiten zu überwiegen.

An dieser Stelle wird überprüft, ob mit dem Übergang zweier symmetrisch um Null lokalisierter Maxima zu einem zentralen Maximum bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen auch der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase beschrieben werden kann (vgl. Unterabschn. 4.2.3). Dazu wird die kritische Füllichte für den Vorzeichenwechsel des Fitparameters  $p_2$  für die Amplitude  $A = 2,22$  cm (Abb. 5.24,  $\square$ ) mit der kritischen Füllichte  $\mu_{c1,sim} = 0,55 \pm 0,01$  aus Abbildung 5.21 verglichen. Für diese Amplitude berechnet sich die kritische Füllichte für den Vorzeichenwechsel von  $p_2$  zu  $\mu_{c,v,sim} = 0,53 \pm 0,01$ . Im Vergleich zu  $\mu_{c1,sim} = 0,55 \pm 0,01$  für die kritische Füllichte des numerischen Übergangs von der fluidartigen in die festkörperartige Phase ist dies eine Abweichung von ca. 3,5 % zu kleineren Füllichten  $\mu$ . Im Gegensatz zu der sehr guten Übereinstimmung im Falle der experimentellen Daten (vgl. Unterabschn. 4.2.3) weisen die numerischen Daten somit eine höhere Diskrepanz für die kritischen Füllichten beider Übergänge auf.

### 5.6.5 Der horizontale Paranusseffekt

Im Folgenden wird das Migrationsverhalten rutschender Scheiben mit den in Abschnitt 4.3 vorgestellten Transporteffekten, dem horizontalen und dem umgekehrt horizontalen Paranusseffekt, verglichen. Abbildung 5.26 zeigt die Migration einer Polypropylenkugel zum Schalenrand (oben) und einer Stahlkugel zum Schalenzentrum (unten) unter den in Abschnitt 4.3 beschriebenen Bedingungen (vgl. Abb. 4.34). Das entsprechende Verhalten der Scheiben in der Simulation wird durch die schwarzen Linien dargestellt. Die Durchmesser und die Dichten bzw. die Massen der Scheiben entsprechen denen der im Experiment benutzten Polypropylen-, Stahl- und Glaskugeln. Die Übereinstimmung ist in beiden Fällen sehr gut. Sowohl das Auftreten beider Migrationseffekte als auch die zeitliche Entwicklung entspricht den Ergebnissen des Experiments.

In Abbildung 5.27 ist das Phasendiagramm für die beiden Migrationsrichtungen in Abhängigkeit der Teilcheneigenschaften für die experimentellen und die numerischen Daten dargestellt. Die Auftragung erfolgt doppeltlogarithmisch. Dabei entsprechen die Symbole den experimentellen Werten, und die Linien repräsentieren die Ergebnisse der Simulation. Die Linien werden durch Interpolation numerischer Datenpunkte gewonnen. Bei den gestrichelten Linien liegen noch nicht genügend numerische Datenpunkte vor, um eine quantitative Aussage über das Migrationsverhalten der Fremdkörper machen zu können. Das Phasendiagramm zeigt deutlich drei verschiedene Bereiche: Der obere Teil repräsentiert die Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalenzentrums, der untere Teil die Migration zum Rand der Schale und die rechte untere Ecke zeigt die Region, in der keine gerichtete Migration des Fremdkörpers zu beobachten ist.

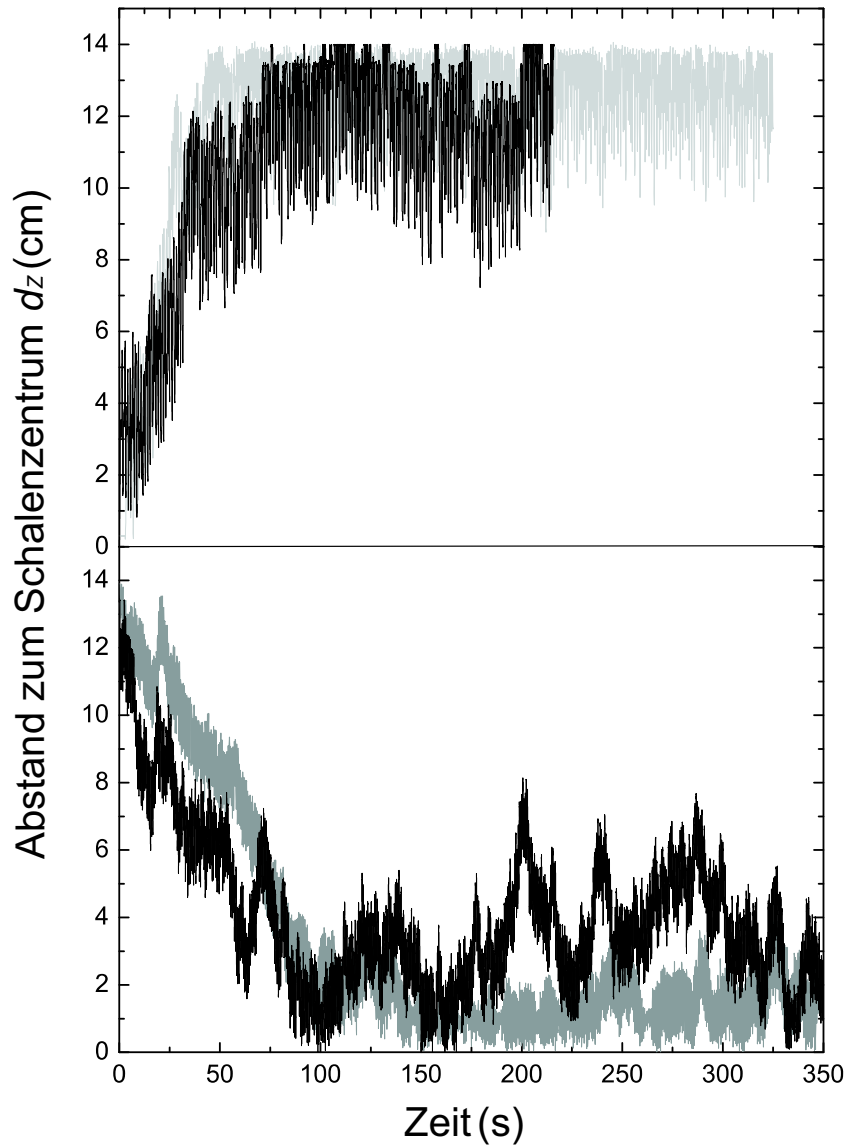


Abbildung 5.26: Abstand zum Schalenzentrum  $d_z$  der Fremdkörper im Experiment (grau) und in der Simulation (schwarz) in Abhängigkeit der Zeit. Oben: Polypropylenkugel ( $d = 1,0$  cm) umgeben von 1500 Glaskugeln ( $d = 0,6$  cm,  $\mu = 0,64$ ) migriert zum Rand der Schale (grau). Entsprechendes gilt für die Scheibe der Simulation (schwarz). Unten: Stahlkugel ( $d = 1,0$  cm) umgeben von 1800 Glaskugeln ( $d = 0,6$  cm,  $\mu = 0,77$ ) migriert zum Zentrum der Schale (grau). Das entsprechende Verhalten der Scheibe in der Simulation ist schwarz dargestellt. Die Amplituden betragen  $A = 1,59$  cm (oben) und  $A = 2,22$  cm (unten). Die Frequenz beträgt in beiden Fällen  $\nu = 1,67$  Hz.

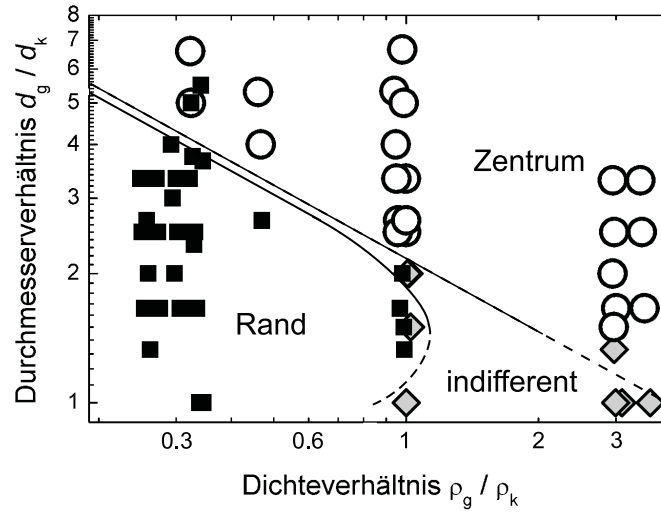


Abbildung 5.27: Phasendiagramm für die beiden Migrationseffekte im Experiment und in der Simulation. Die Abbildung zeigt die Bereiche, in denen in Abhängigkeit der Teilcheneigenschaften Migration des Fremdkörpers in Richtung des Schalenzentrums ( $\circ$ ) und in Richtung des Schalenrandes ( $\blacksquare$ ) stattfindet, oder keine Migration zu beobachten ist ( $\diamond$ ). Die Symbole zeigen die experimentellen Ergebnisse. Die Linien repräsentieren die numerisch gewonnenen Grenzlinien zwischen den drei Bereichen.

Sowohl im Experiment als auch in der Simulation hängt die Richtung der Migration des Fremdkörpers vom Durchmesser- und Dichteverhältnis der binären Mischung ab. Die Bereiche unterschiedlicher Migrationsrichtung sind wie im Experiment deutlich voneinander getrennt. Der in den numerischen Simulationen gefundene Übergang von der Migration in Richtung des Schalenrandes zu der in Richtung des Schalenzentrums stimmt mit dem experimentellen Grenzbereich überein. Ein, wie zuvor beschrieben, modifiziertes System rutschender Scheiben zeigt ein identisches Verhalten zu einem experimentellen System rollender Kugeln. Aufgrund der sehr guten Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment können wir folgern, dass die detaillierte Kinematik von rollenden Kugeln für die dargestellten Effekte nicht von Bedeutung ist. Weiterhin können wir ausschließen, dass die Gravitation, die die Kugeln umgebende Luft, die Oberflächeneigenschaften der Kugeln, usw. relevante Parameter für die gezeigten Effekte sind. Diese Untersuchungen bekräftigen die in Unterabschnitt 4.3.3 dargestellten Überlegungen, dass die Fremdkörper abhängig von ihrer Massenträgheit in Bereiche hoher oder niedriger lokaler Packungsdichte migrieren.

Da allen Scheiben der Simulation die gleichen Werte für den Restitutions-

koeffizienten und den Gleitreibungskoeffizienten zugeteilt werden, unterscheiden sich die hier vorgestellten Segregationsergebnisse von denen von Kondic et al. (2003). Bei dem von ihnen beobachteten Segregationseffekt zweier Kugelsorten unter dem Einfluss einer horizontalen Oszillation unterscheiden sich die beiden Kugelsorten einzig in dem Wert ihres Rollreibungskoeffizienten.

### 5.6.6 Fazit

Obwohl in der Simulation die detaillierte Rollbewegung der Kugeln vernachlässigt wird, gelingt mit der Numerik eine zufriedenstellende Reproduktion fast aller hier vorgestellten experimentellen Ergebnisse. Der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase ist sowohl im Experiment als auch in der Simulation kontinuierlich und stimmt qualitativ überein. Die kritischen Füllichten unterscheiden sich um nur 3,5 %. Auch der damit verknüpfte Übergang in der Topologie der Geschwindigkeitsverteilungen ist im Experiment sowie in der Simulation präsent und mit einem Unterschied von nur 1 % für die kritische Füllichte in guter Übereinstimmung. Bei den vorgestellten Transporteffekten stimmen die Ergebnisse von Experiment und Simulation sowohl qualitativ als auch quantitativ überein. Die Verhaltensweisen der Fremdkörper im Experiment und in der Simulation sind nahezu identisch. Dies gilt sowohl für die zeitliche Entwicklung des radialen Abstands zum Schalenzentrum als auch für die Richtungsabhängigkeit der Migration von den Teilcheneigenschaften Durchmesser- und Dichteverhältnis. Lediglich die numerischen Untersuchungen zum Einsatz des Clusterprozesses, d. h. der Fluidisierung der Kugeln bei Erhöhung der Füllichte  $\mu$ , zeigen starke Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen. So findet man in der Simulation keinen hysteretischen Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase, die durch den einsetzenden Clusterprozess der Kugeln charakterisiert ist. In der Simulation verläuft dieser Übergang kontinuierlich. Diese Diskrepanz ist mit der Verwendung eines Ereignis-Dynamik orientierten Programmablaufs zu begründen. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt möglich ist, Clusterprozesse in Vielteilchensystemen durch eine Abfolge binärer Stöße adäquat beschreiben zu können. Können Methoden wie das am Anfang dieses Kapitels erläuterte TC-Modell eine Brücke zu den simultanen Stößen mehrerer Kugeln bilden?

Zu Beginn dieses Kapitels wurde die Frage gestellt, ob ein System rollender Kugeln durch ein modifiziertes System rutschender Scheiben beschrieben werden kann. Nach dem Vergleich der numerischen mit den experimentellen Ergebnissen kann diese Frage weder bejaht noch verneint werden. Unterschiedliche granulare Effekte werden durch unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen, die wiederum der Relevanz unterschiedlicher Parameter unterliegen. Umso überraschender ist demnach die insgesamt gute Übereinstimmung von Experiment und Simulation für die in dieser Arbeit dargestellten granularen Effekte.

Der Vorteil der Simulation gegenüber dem Experiment liegt darin, die granulare Dynamik durch die Kenntnis aller Teilchenpositionen und ihrer Geschwindigkeiten besser untersuchen zu können. Während die Möglichkeit zur Bestimmung der Teilchenpositionen im Experiment durch die Größe der Teilchen begrenzt ist (vgl. Kap. 3), stehen die Positionen der Teilchen beliebiger Größe in der Simulation stets zur Verfügung. Weiterhin stellt sich in der Simulation nicht das Problem, Teilchenpositionen zweier aufeinander folgender Aufnahmen zur Bestimmung ihrer Geschwindigkeiten zueinander zuordnen zu müssen. Wie auch die Positionen stehen ihre Geschwindigkeiten in der Simulation zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung, weil die Teilchen in der Simulation nummeriert und somit unterscheidbar sind. Die komplizierte Messtechnik zur Bestimmung der experimentellen Teilchengeschwindigkeiten und damit die in Kapitel 3 dargestellten Einschränkungen durch zu hohe und somit nicht mehr messbare Geschwindigkeiten entfallen. Dadurch werden Messbereiche zugänglich, die experimentell nicht untersucht werden können. Außerdem können durch Vergleich von numerischen und experimentellen Ergebnissen die für die beobachteten Effekte relevanten Parameter aus der Simulation extrahiert bzw. variiert werden. Ein Nachteil der Simulation ist, dass der Zeitaufwand der Simulationsdurchführung deutlich über dem eines Experimentiervorgangs liegt. Insbesondere die Betrachtung von Systemen mit einer hohen Anzahl an Teilchen erfordert einen im Gegensatz zum Experiment hohen Zeitaufwand.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Dynamik granularer Materie äußert sich nicht nur in optisch faszinierenden Strukturbildungsprozessen, wie sie beispielsweise in Form von Sandrippeln am Strand zu beobachten sind. Tatsächlich führt das oftmals kontra-intuitive Verhalten eines angeregten Vielteilchensystems besonders in der Industrie zu unerwünschten Effekten und ist daher von großer Bedeutung.

Um ein grundlegendes Verständnis granularer Verhaltensweisen zu erlangen, wurde das dynamische Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss einer horizontal zirkularen Oszillation untersucht. Dazu wurde jeweils eine Monolage von Kugeln in einer kreisförmigen Schale betrachtet. Der experimentelle Aufbau gewährleistet eine isotrope Anregung des Granulats und erlaubt die Betrachtung aller beteiligten Kugeln. Um die Dynamik der Kugeln untersuchen zu können, wurden ihre Positionen bei den Messungen computerunterstützt erfasst. So konnten Abstands- und Geschwindigkeitskriterien angewendet und die Dynamik einzelner Kugeln in einem Cluster betrachtet werden.

In Abhängigkeit der Füllichte und der Amplitude konnten drei Phasen verifiziert werden, die aufgrund des jeweiligen Kugelverhaltens als plastische, fluidartige oder festkörperartige Phase bezeichnet wurden. Die plastische Phase ist durch eine geringe Wechselwirkung der Kugeln untereinander und dem Rand der Schale charakterisiert. Alle Kugeln beschreiben unabhängig voneinander eine durch die Bewegungsform der Schale induzierte kreisförmige Bewegung mit gleichem Radius. In der fluidartigen Phase clustern die Kugeln und zeigen ein kollektives Verhalten. Innerhalb des Clusters ändern die Kugeln ständig ihre relative Positionierung zueinander – eine strukturierte Anordnung der Kugeln in dem Cluster ist nicht zu erkennen. Demgegenüber tritt in der festkörperartigen Phase eine Strukturierung in der Anordnung der Kugeln auf. Sie ordnen sich auf einem hexagonalen Gitter an, und eine Bewegung der Kugeln relativ zueinander findet nur in geringem Maße statt.

Sowohl der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase als auch der

Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase kann entweder durch Erhöhung der Füllichte oder der Amplitude erreicht werden. Die Fluidisierung, d. h. der Übergang von der plastischen in die fluidartige Phase ist sprunghaft und hysteretisch. Die Breite der Hysterese ist abhängig von der Amplitude und wächst linear mit dieser. Die Kristallisation, d. h. der Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase ist kontinuierlich. In beiden Fällen verschiebt sich der für den Übergang kritische Wert der Füllichte mit wachsender Amplitude zu kleineren Werten. Dabei liegt die kritische Füllichte für die Fluidisierung des Granulats stets unterhalb derjenigen für die Kristallisation. Für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase wurde das Verhalten von Kugeln unterschiedlicher Größe miteinander verglichen. Eine starke Abhängigkeit der kritischen Füllichten von der verwendeten Kugelgröße eines monodispersen Granulats konnte nicht beobachtet werden. In Hinsicht auf die genannten Phasenübergänge ist eine systematische Untersuchung der Frequenzabhängigkeit des Kugelverhaltens eine herausfordernde Aufgabenstellung für die Zukunft. Insbesondere stellt sich die Frage, wie sich die für die Übergänge kritischen Füllichten bei Variation der Frequenz verhalten.

Das Verhalten der Kugeln in den unterschiedlichen Phasen spiegelt sich auch in den entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen der Kugeln wieder. In der Topologie der Verteilungen für eine Geschwindigkeitskomponente ist ein Übergang von zwei symmetrisch um Null lokalisierten Maxima zu einem Maximum bei Null zu verzeichnen, wenn die Füllichte erhöht wird. Die für diesen Übergang kritische Füllichte fällt mit der kritischen Füllichte für den Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zusammen. Der Grund dafür liegt in der mit wachsender Füllichte zunehmenden Anzahl inelastischer Stöße der Kugeln untereinander und mit dem Rand der Schale: Der durch inelastische Stöße hervorgerufene Energieverlust der Kugeln äußert sich in einer Reduzierung des Betrags ihrer durchschnittlichen Geschwindigkeit. Gleichzeitig wird die lokale Packungsdichte des Kugelclusters erhöht, wenn er mit wachsender Füllichte vermehrt inelastisch gegen den Rand der Schale stößt. Beim Übergang in die festkörperartige Phase äußert sich dies in einer hexagonalen Anordnung der Kugeln zueinander.

Weiterhin wurden zwei Segregations- bzw. Transporteffekte vorgestellt, die auffällige Ähnlichkeit zu dem Paranusseffekt und dem umgekehrten Paranusseffekt zeigen: In das Granulat eingebrachte Fremdkörper geringer Dichte und kleinen Durchmessers tendieren dazu, zum Rand der Schale zu wandern. Dieser Effekt wird als horizontaler Paranusseffekt bezeichnet. Fremdkörper hoher Dichte und großen Durchmessers bevorzugen die Migration in Richtung des Schalenzen-trums. Diesen Effekt bezeichnen wir als umgekehrt horizontalen Paranusseffekt. Die Namensgebung erfolgt aufgrund der Parallelen zum "normalen" Paranusseffekt und dessen Umkehrung. Sowohl beim Paranusseffekt als auch beim horizontalen Paranusseffekt wandern die Fremdkörper in Bereiche geringer lokaler



Packungsdichte, während sie bei dem jeweils umgekehrten Effekt in Gebiete hoher lokaler Packungsdichte gedrängt werden.

Die horizontalen Transporteffekte wurden in Abhängigkeit der Teilcheneigenschaften Durchmesser und Dichte, der Anregungsparameter Amplitude und Frequenz sowie der Füllichte untersucht. Für konstante Werte der Füllichte, der Amplitude und der Frequenz kann der Übergang vom horizontalen Paranusseffekt zum umgekehrt horizontalen Paranusseffekt sowohl durch Variation des Durchmessers als auch der Dichte des Fremdkörpers erreicht werden. Im Gegensatz zu den Ergebnissen von Breu et al. (2003) für die vertikalen Effekte kann dieser Übergang jedoch nicht durch Variation der Anregungsparameter Amplitude und Frequenz hervorgerufen werden. Auch eine Änderung der Füllichte hat keinen Einfluss auf die Migrationsrichtung eines Fremdkörpers.

Bei Variation der Füllichte und der Amplitude stellte sich heraus, dass für das Auftreten beider Effekte die Füllichte der den Fremdkörper umgebenden Kugeln einen kritischen Wert überschreiten muss. Dieser sinkt mit wachsender Amplitude und ist unabhängig von der eingestellten Frequenz. Unterhalb der jeweils kritischen Füllichten zeigen die Fremdkörper keine gerichtete Migration in der Schale. Die kritische Füllichte für einen zum Schalenrand migrierenden Fremdkörper fällt mit der kritischen Füllichte für die Fluidisierung der Kugeln zusammen. Demnach kann der horizontale Paranusseffekt sowohl in der fluidartigen als auch in der festkörperartigen Phase beobachtet werden. Eine Vermessung dieses Zusammenhangs konnte nicht durchgeführt werden, da die verwendeten Kugeln zu klein waren, um sie computerunterstützt erfassen zu können. Dieses Problem könnte durch Verbesserung der verwendeten Messtechniken gelöst werden und ist eine interessante Aufgabenstellung für weiterführende Untersuchungen. Die kritische Füllichte für die Migration großer Kugeln hoher Dichte in Richtung des Schalenzentrums ist mit der kritischen Füllichte für den Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase verknüpft. Der Transport eines zum Schalenzentrum wandernden Fremdkörpers ist nur dann zu beobachten, wenn sich die den Fremdkörper umgebenden Kugeln im festkörperartigen Zustand befinden. In der plastischen und in der fluidartigen Phase kann dieser Effekt nicht beobachtet werden.

Die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit des horizontalen Paranusseffektes und seiner Umkehrung ergab, dass die Frequenz weder Einfluss auf das Auftreten beider Effekte noch auf die Migrationsrichtung der Fremdkörper hat. Lediglich die Zeitdauer bis zum Abschluss der Fremdkörpermigration nimmt mit wachsender Frequenz ab. Eine quantitative Beschreibung dieser Abhängigkeit steht noch aus, verspricht jedoch keine neuen Erkenntnisse bezüglich des Auftretens beider Effekte.

Zur Erkundung der für die genannten Phänomene relevanten Parameter wurden numerische Simulationen durchgeführt. Darin wurde die Dynamik rollender

Kugeln auf ein “modifiziertes” System harter, rotationsfrei rutschender Scheiben übertragen. Die Modifikation des Scheibensystems bestand darin, die durch die Bewegung der Schale hervorgerufene Beschleunigung einer Kugel auf die Scheiben zu übertragen. Anhand des Vergleichs von numerischen und experimentellen Ergebnissen wurde überprüft, ob mit einer solchen Vereinfachung das Verhalten rollender Kugeln zufriedenstellend beschrieben werden kann. Bei quantitativer Übereinstimmung der Ergebnisse von Experiment und Simulation wurden die für den beobachteten Effekt relevanten Parameter extrahiert.

Der numerisch bestimmte Phasenübergang von der plastischen in die fluidartige Phase zeigt kein hysteretisches Verhalten, sondern einen kontinuierlichen Verlauf. Die kritische Füllichte für den Übergang weicht jedoch nur geringfügig von dem entsprechenden experimentellen Wert ab. Demnach scheint die Fluidisierung der Kugeln und damit der Prozess des Clusters durch die Bewegung harter, rotationsfrei rutschender Scheiben nicht zufriedenstellend darstellbar zu sein. Eine Erklärung hierfür besteht darin, dass aufgrund der Betrachtung rotationsfreier Scheiben in der Simulation bei einem Zusammenstoß zweier Scheiben keine Drehmomente aufeinander ausgeübt werden. Außerdem haben die Scheiben in der Simulation exakt die gleiche Größe, während die Kugeln im Experiment eine gewisse Toleranz bezüglich ihrer Durchmesser aufweisen. Durch diese Eigenschaften der Scheiben unterscheidet sich der Prozess des Clusters in der Simulation von dem im Experiment.

Der numerisch bestimmte Phasenübergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase stimmt qualitativ mit den Ergebnissen des Experiments überein. Quantitative Abweichungen sind besonders bei hohen Füllichten zu verzeichnen. Das gleiche gilt für den Vergleich zwischen den experimentell und numerisch bestimmten Geschwindigkeitsverteilungen. Für diese Abweichungen ist die numerische Behandlung eines Vielteilchenstoßes verantwortlich: Während im Experiment mehrere Teilchen eines Clusters über einen bestimmten Zeitraum in Kontakt miteinander sein können, wird ein solches Szenario in der Simulation durch eine Abfolge binärer Teilchenstöße realisiert. Die dadurch erhöhte Anzahl an dissipativen Stößen der Scheiben im Gegensatz zu den Kugeln im Experiment macht sich besonders bei hohen Füllichten bemerkbar. Der durch die unrealistisch vielen dissipativen Stöße hervorgerufene Energieverlust der Scheiben kann auch durch die Verwendung des von Luding & McNamara (1998) propagierten TC-Modells zur Vermeidung dieses Effekts nicht kompensiert werden.

Im Falle der Transporteffekte zeigt die zeitliche Entwicklung für die Trajektorien der migrierenden Scheiben sowohl qualitativ als auch quantitativ das gleiche Verhalten wie die entsprechenden Kugeln im Experiment. Demnach scheint die komplizierte Rollbewegung der Kugeln keinen Einfluss auf die dargestellten Transporteffekte zu haben. Auch die Gravitation, die Oberflächenbeschaffenheiten oder die unterschiedlichen Rollreibungs- und Restitutionskoeffizienten ver-

schiedener Kugelsorten einer binären Mischung konnten als relevante Parameter ausgeschlossen werden. Die Richtung der Fremdkörpermigration ist einzig durch die Teilcheneigenschaften Durchmesser und Dichte vorgegeben.

Um die Simulation zeitlich effizienter zu gestalten, wäre eine Parallelisierung des Programmcodes zur Ausführung auf einem Computersystem mit mehreren Prozessoren wünschenswert. Außerdem sollte in Hinsicht auf den Prozess des Clusters die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, das Verhalten rotierender Scheiben bzw. Kugeln zu simulieren.

Sowohl die Simulation als auch das Experiment geben Einblicke in die Dynamik granularer Systeme und helfen, das Verhalten eines Granulats unter dem Einfluss äußerer Anregungen besser zu verstehen. Die Vorzüge des hier verwendeten Versuchsaufbaus liegen in der Möglichkeit, grundlegende granulare Phänomene wie Fluidisierung, Kristallisation, Transport und Segregation in einem einzigen System untersuchen zu können.



# Anhang A

## Bestimmung kritischer Füllichten

### A.1 Kristallisation

Um die kritische Füllichte  $\mu_{cl}$  für den Übergang von der fluidartigen in die festkörperartige Phase zu bestimmen, werden folgende Schritte durchgeführt:

- Aus den Anfangs- und Endwerten der Daten  $\beta(\mu)$ , die das Verhalten des Ordnungsparameters  $\beta$  in Abhängigkeit der Füllichte  $\mu$  beschreiben, wird eine Geradengleichung  $g(\mu)$  bestimmt.
- Die Daten der Geraden  $g(\mu)$  werden von den Originaldaten  $\beta(\mu)$  subtrahiert.
- Die so erhaltenen neuen Daten  $f(\mu) = \beta(\mu) - g(\mu)$  werden mit einem Tiefpass gefiltert, bis der Betrag jeder lokalen, negativen Steigung der Daten  $f(\mu)$  kleiner ist als die Steigung der Geraden  $g(\mu)$ .
- Anschließend werden die Daten der Geraden  $g(\mu)$  auf die gefilterten Daten  $f(\mu)$  aufaddiert. Dadurch sind die Originaldaten  $\beta(\mu)$  in der Form gefiltert worden, dass sie monoton steigend sind. Wir nennen sie  $\beta_{ms}(\mu)$ .
- Aus den neuen Daten  $\beta_{ms}(\mu)$  wird nun das Minimum bestimmt.
- Da sich die Originaldaten  $\beta(\mu)$  aus einer Mittelung von jeweils 200 Messwerten ergeben, weisen sie für jeden Messpunkt eine Standardabweichung auf. Zu dem Minimum der neuen Daten  $\beta_{ms}(\mu)$  wird nun der dreifache Wert der durchschnittlichen Standardabweichung aller Originaldaten aufaddiert. Dadurch erhält man einen Wert  $\beta_1$  für den Ordnungsparameter, der der festkörperartigen Phase zugeschrieben wird.

- Dann wird die gesamte Schale mit Kugeln des betrachteten Typs gefüllt, wobei die Kugeln möglichst dicht auf ein hexagonales Gitter positioniert werden. Der entsprechende Ordnungsparameter  $\beta_{\max}$  wird nach dem in Unterabschnitt 4.1.5 beschriebenen Verfahren bestimmt. Dieser Wert wird anschließend halbiert und man erhält einen weiteren Wert  $\beta_2$  der ebenfalls der geordneten, festkörperartigen Phase zugeschrieben wird. Dabei gilt:  $\beta_1 < \beta_2$ .
- Zu den Werten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  des Ordnungsparameters werden nun die entsprechenden Fülldichten aus den monoton steigenden Daten  $\beta_{\text{ms}}(\mu)$  bestimmt. Für die Originaldaten  $\beta(\mu)$  mit  $\beta_1 < \beta(\mu) < \beta_2$  wird dann ein linearer Fit  $a(\mu)$  angepasst.
- Anschließend werden der Schnittpunkt des Fits  $a(\mu)$  mit Null und die dazu gehörige Fülldichte  $\mu_1$  bestimmt. Aufgrund der Definition des Ordnungsparameters  $\beta$  befinden wir uns bei dieser Fülldichte in der ungeordneten, fluidartigen Phase.
- Unter Verwendung der Originaldaten  $\beta(\mu)$  wird nun ein Mittelwert  $\beta_m$  ausgehend von der kleinsten betrachteten Fülldichte  $\mu_{\min}$  bis zur Fülldichte  $\mu = \mu_1$  bestimmt.
- Der Schnittpunkt der Konstanten  $k_1$  mit dem Wert  $\beta_m$  mit dem linearen Fit  $a(\mu)$  liefert die gesuchte kritische Fülldichte  $\mu_{c1}$ .

## A.2 Vollständige Kristallisation

Die Bestimmung der kritischen Fülldichte  $\mu_{c2}$  aus den experimentellen Daten erfolgt in weiten Teilen analog zu dem zuvor vorgestellten Verfahren zur Bestimmung der kritischen Fülldichte  $\mu_{c1}$ .

- An die Originaldaten  $\beta(\mu)$  mit  $\beta_1 < \beta(\mu) < \beta_2$  wird ein linearer Fit  $a(\mu)$  angepasst.  $\beta_1$  und  $\beta_2$  werden wie zuvor beschrieben bestimmt.
- Nun wird an jeden Datenpunkt  $(\mu, a(\mu))$  des linearen Fits  $a(\mu)$  eine Konstante  $k_2$  für größer werdende Fülldichten  $\mu$  angesetzt. Der Ansatzpunkt der Konstanten  $k_2$  an  $a(\mu)$  wird mit  $(\mu_A, a(\mu_A))$  bezeichnet. Weiterhin sei  $\beta(\mu_1) = \beta_1$  und  $\beta(\mu_2) = \beta_2$ . Für jeden Punkt  $(\mu, a(\mu))$  mit  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  wird dann eine Funktion  $d(\mu)$  definiert, für die gilt:

$$d(\mu) = \begin{cases} a(\mu) & \forall \mu \text{ mit } \mu_1 < \mu < \mu_A \\ k_2 & \forall \mu \text{ mit } \mu_A \leq \mu \end{cases}$$

- Für jedes  $\mu_A$  wird nun der  $\text{rms}^1$  von  $d(\mu)$  zu  $\beta(\mu)$  ermittelt.

---

<sup>1</sup>root mean square

- Der Ansatzpunkt  $(\mu_A, a(\mu_A))$  mit dem kleinsten rms liefert die gesuchte kritische Fülldichte  $\mu_{c2}$  für die vollständige Kristallisation der Kugeln. Dann gilt:  $\mu_{c2} = \mu_A$ .







```

        (fpix[y*breite+x]>150)
    )
    {
        //Parabelnaeherung

        xpos[locmaxcnt]=x - 0.5 -(fpix[y*breite+x]
        -fpix[y*breite+(x-1)])/(fpix[y*breite+(x+1)]
        -fpix[y*breite+x]-fpix[y*breite+x]
        +fpix[y*breite+(x-1)]);

        ypos[locmaxcnt]=y - 0.5 -(fpix[y*breite+x]
        -fpix[(y-1)*breite+x])/(fpix[(y+1)*breite+x]
        -fpix[y*breite+x]-fpix[y*breite+x]
        +fpix[(y-1)*breite+x]);
        locmaxcnt++;
    }
}

out.open("x_position.dat",ios::out);
for(int b = 0;b <locmaxcnt;b++)
{
    out<<xpos[b]<<endl;
}
out.close();

out.open("y_position.dat",ios::out);
for(int w = 0;w <locmaxcnt;w++)
{
    out<<xpos[w]<<endl;
}
out.close();
return locmaxcnt;
}

//-----
void bild::produkt(char *name,float *fpix,float *cpix)
{
    const int xs=11,ys=11;
    float patt[ys][xs];
    int xmit=(xs-1)/2,ymit=(ys-1)/2;

    for(int y=0;y<ys;y++)
    for(int x=0;x<xs;x++)
        if (sqrt(pow(x-xmit,2)+pow(y-ymit,2))<4.3);
            patt[y][x]=1-sqrt(pow(x-xmit,2)+pow(y-ymit,2))/4.3;
}

```

```

        else
            patt[y][x]=0.;

//Berechnung der Correlation, Ergebnisse nach CPIX:

for(y=0;y<hoehe;y++)
for(int x=0;x<breite;x++)
{
    cpix[y*breite+x]=0.;
    for (int iy=0;iy<ys;iy++)
    for (int ix=0;ix<xs;ix++)
    {
        int yt=min((max(y+iy-ymit,0)),YB-1);
        int xt=min((max(x+ix-xmit,0)),XB-1);
        cpix[y*breite+x]+=fpix[yt*breite+xt]
            *patt[iy][ix];
    }
}
for(y=0;y<YB;y++)
for(int x=0;x<XB;x++)
    fpix[y*breite+x]=cpix[y*breite+x];
}

//-----

void bild::zuordner(char *name,float *xpos,float *ypos
,float *xneu1,float *yneu1,float *distanz)
{
    int zaehler=0;int zaehleralt=0;
    float xposbruecke[1000];float yposbruecke[1000];
    float speed[1000];float xspeed[1000];float yspeed[1000];
    float xposmindis=0;
    float yposmindis=0;
    float mindistanz=0;
    float xposdis[1000];
    float yposdis[1000];
    double speedsumme=0;
    double xspeedsumme=0;
    double yspeedsumme=0;
    double durchspeed=0;
    double xdurchspeed=0;
    double ydurchspeed=0;

```

```

ifstream in;
in.open("x_position.dat",ios::in);
for(int h = 0;h < locmaxcnt;h++)
{
    in>>xposbruecke[h];
}
in.close();

in.open("y_position.dat",ios::in);
for(int s = 0;s < locmaxcnt;s++)
{
    in>>yposbruecke[s];
}
in.close();

for(int j = 0; j < locmaxcnt; j++)
{
    for(int i = 0; i < locmaxcnt; i++)
    {
        distanz[zaehler] = sqrt ((xpos[i] - xposbruecke[j])
        *(xpos[i] - xposbruecke[j])+(ypos[i] - yposbruecke[j])
        *(ypos[i] - yposbruecke[j]));

        xposdis[zaehler] = xpos[i];
        yposdis[zaehler] = ypos[i];
        zaehler++;
    }
    mindistanz = distanz[0];
    xposmindis = xpos[0];
    yposmindis = ypos[0];
    for(int u = 1;u < zaehler;u++)
    {
        if(distanz[u] < mindistanz)
        {
            mindistanz = distanz[u];
            xposmindis = xposdis[u];
            yposmindis = yposdis[u];
        }
    }
    xneu1[j] = xposmindis;
    yneu1[j] = yposmindis;
    speed[j] = (mindistanz * 0.062)/KAMPER;//1 Pixel = 0,06 cm.
    xspeed[j] = ((xposmindis - xposbruecke[j])*0.062)/KAMPER;

```

```

yspeed[j] = ((yposmindis - yposbruecke[j])*0.062)/KAMPER;
zaehler = 0;
}
for(int o = 0;o < locmaxcnt;o++)
{
    speedsumme += speed[0];
    xspeedsumme += xspeed[0];
    yspeedsumme += yspeed[0];
}
durchspeed = speedsumme / locmaxcnt;
xdurchspeed = xspeedsumme / locmaxcnt;
ydurchspeed = yspeedsumme / locmaxcnt;
speedsumme = 0;
xspeedsumme = 0;
yspeedsumme = 0;
ofstream out;
out.open("x_position.dat",ios::out);
for(int f = 0;f < locmaxcnt;f++)
{
    out<<xneu1[f]<<endl;
}
out.close();

out.open("y_position.dat",ios::out);
for(int c = 0;c < locmaxcnt;c++)
{
    out<<yneu1[c]<<endl;
}
out.close();
out<<endl;
out.close();
}

```

//-----

## B.2 Simulation

Hier werden die wichtigsten Funktionen der numerischen Simulation dargestellt. Mit der Funktion *timecalculator* wird die Zeit bis zum nächsten Stoßereignis berechnet. Die Funktion *reduceoverlap* verhindert ein durch numerische Ungenauigkeiten verursachtes Überlappen zweier Scheiben während eines Stoßes. Mit der Funktion *speedupdate* werden die Geschwindigkeiten der Scheiben nach einem Stoß aktualisiert. Mit der Funktion *sphereseacher* werden die Scheiben bestimmt, für die nach einem Stoßereignis eine neue Stoßzeit berechnet werden muss. Die Vorgehensweisen der genannten Funktionen sind in Kapitel 5 dargestellt.

```

/*****begin timecalculator*****/
long double container::timecalculator()
{
    static long double timeleft = 0.; //time spent in one phase
    int j= 0; //loop-counter
    long double colmin=0.;
    const long double boundarytime = 1./(FREQUENZ*EDGENUMBER);
    static long double *xphasespeed=new long double[EDGENUMBER];
    static long double *yphasespeed=new long double[EDGENUMBER];
    static boolean iniflag=true;
    if (iniflag)
    {
        for (int i=0;i<EDGENUMBER;i++)
        {
            long double h=8.*atan(1.)/(EDGENUMBER);
            xphasespeed[i] =
            -AMPLITUDE*(sin (h*(i+1)) - sin(h*i))/boundarytime;
            yphasespeed[i] =
            -AMPLITUDE*(cos(h*(i+1))- cos(h*i))/boundarytime;
        }
        ypos[0]=-AMPLITUDE;
        xpos[0]=0.;
        xspeed0alt=xphasespeed[EDGENUMBER-1];
        yspeed0alt=yphasespeed[EDGENUMBER-1];
        phase=0;
        xspeed[0]=xphasespeed[phase%EDGENUMBER];
        yspeed[0]=yphasespeed[phase%EDGENUMBER];
        iniflag=false;
    } //end initializing

    if (spherecounter<1)

```

```

{
    cout<<"timecalc: es gibt nichts zu tun?"<<endl;
    exit (-1);
}

for(int vv = 0;vv < spherecounter;vv++)
    coltimeall[sphere[vv]]=TIMEBIG;

//sphere-boundary hit :

for(j = 0;j < spherecounter;j++)
{
    int i=sphere[j];
    long double b = xspeed[i]*xspeed[i]
    + yspeed[i]*yspeed[i];
    if (b>0.) //some movement
    {
        long double a =
        2*xpos[i]*xspeed[i]+2*ypos[i]*yspeed[i];
        long double c =
        xpos[i]*xpos[i] +ypos[i]*ypos[i]
        -((sphereradius[0]-sphereradius[i])
        *(sphereradius[0]-sphereradius[i]));

        register long double discr=a*a/(4*b*b)-c/b;
        if (discr<0.) //should never happen
        {
            exit(-1);
        }
        if(-a/(2.*b) + sqrt(discr) < coltimeall[i])
        {
            coltimeall[i] =
            -a/(2.*b) + sqrt(discr);
            partnerall[i] = 0;
        }
    } //end b>0
} //end j

//start calculating times for possible hits:

for(int hh = 0;hh < spherecounter;hh++)
{
    int i=sphere[hh]; //for shorthand writing

```

```

if (i==1) j=2;else j=1; //start j
while (j<=KUGELANZAHL)
{
    long double vxij = xspeed[i] - xspeed[j];
    long double vyij = yspeed[i] - yspeed[j];
    long double vijsq = vxij * vxij + vyij * vyij;
    if (vijsq!=0.) //some relative movement
    {
        long double rxij = xpos[i] - xpos[j];
        long double ryij = ypos[i] - ypos[j];
        long double bij = rxij * vxij + ryij * vyij;
        if(bij < 0.)//there must be 2 positive roots
        {
            long double tij = bij * bij - vijsq *
            (rxij * rxij + ryij * ryij -
            ((sphereradius[i] + sphereradius[j])*
            (sphereradius[i] + sphereradius[j])));
            if(tij > 0.)
            {
                // speres only touching...
                tij=(-sqrt(tij)- bij)/vijsq;
                if (tij>0.)
                {
                    if(tij < coltimeall[i])
                    {coltimeall[i] =
                    tij;partnerall[i] = j;}
                    if(tij < coltimeall[j])
                    {coltimeall[j] =
                    tij;partnerall[j] = i;}
                }
            }
            //end of positive time block
        } //end of positive discriminante block
    } //end of bij<0. - block
} //end of vijsq - block
j++;
if (j==i) j++; //do not hit sphere j with itsel
} //end for j
} // end hh

//Now find the smallest time in caltimeall:

colmin = coltimeall[1]; //minimum initialiszation
colpartner1 = 1;
colpartner2 = partnerall[1];
int i=2;

```



```

while(i <= KUGELANZAHL)
{
    if(coltimeall[i] < colmin)
    {
        colmin = coltimeall[i];
        colpartner1 = i;
        colpartner2 = partnerall[i];
    }
    i++;
} //end i-while, the smallest time is now in colmin
if(colmin > boundarytime - timeleft)
//timeleft:time already used (!)in phase
{
    colmin = boundarytime - timeleft;//start a new phase
    xspeed0alt=xspeed[0];
    yspeed0alt=yspeed[0];
    phase=phase+1;
    phase=phase%EDGENUMBER;
    xspeed[0] = xphasespeed[phase];
    yspeed[0] = yphasespeed[phase];
    if (phase==0)
    {
        ypos[0]=-AMPLITUDE;
        xpos[0]=0.;
    }
    timeleft = 0.;
    hit=false;
}
else
{
    timeleft += colmin; //really +? name misleading
    hit=true;
}
mintimeadder = mintimeadder+colmin;
for(i = 1;i < KUGELANZAHL+1 ;i++) coltimeall[i] -= colmin;
return colmin;
}
/*****end timecalculator*****/

/*****begin reduce_overlap*****/
int container::reduce_overlap()
{
    static boolean iniflag=true;

```

```

static long double *radsumsq
=new long double[KUGELANZAHL*KUGELANZAHL];
if(!radsumsq)
{
    cout<<"Speicherprobleme"<<endl;
    exit(-1);
}
if (iniflag)
{
    unsigned int counter=0;
    for(int i = 1;i < KUGELANZAHL;i++)//0 for container
    {
        for(int j = i+1;j < KUGELANZAHL+1;j++)
        {
            radsumsq[counter]
            =(sphereradius[i] + sphereradius[j])
            *(sphereradius[i] + sphereradius[j]);
            counter++;
        }
    }
    iniflag=false;
}
int reduktionen=0;
long double boundfactor =0.9999999; //ca. 1.e-6 r
long double spherefactor=0.0000001;
for(int j = 1;j < KUGELANZAHL+1;j++)//all spheres with container
{
    register long double radsumsq=
    (sphereradius[0]-sphereradius[j])
    *(sphereradius[0]-sphereradius[j]);
    register long double distsq=xpos[j]
    *xpos[j]+ypos[j]*ypos[j];
    if(distsq > radsumsq)
    {
        xpos[j]*=boundfactor; //to the center
        ypos[j]*=boundfactor;
        reduktionen++;
    }
}
int counter=-1;
for(int i = 1;i < KUGELANZAHL;i++)//0 for container
{
    for(int j = i+1;j < KUGELANZAHL+1;j++)

```

```

{
    register long double distxsq=
    (xpos[i] - xpos[j])*(xpos[i] - xpos[j]);
    counter++;
    if (distxsq<radsumsq[counter]) //compare x roughly
    {
        register long double distysq=
        (ypos[i] - ypos[j])*(ypos[i] - ypos[j]);
        if(distysq<radsumsq[counter])//compare y roughly
        {
            if((distysq+distxsq)
            <radsumsq[counter])//compare precisely
            {
                do
                {
                    xpos[i]+=(xpos[i]-xpos[j])*spherefactor;
                    ypos[i]+=(ypos[i]-ypos[j])*spherefactor;
                    xpos[j]-=(xpos[i]-xpos[j])*spherefactor;
                    ypos[j]-=(ypos[i]-ypos[j])*spherefactor;
                }
                while ((xpos[i] - xpos[j])*(xpos[i] - xpos[j])
                    +(ypos[i] - ypos[j])*(ypos[i] - ypos[j])
                    <radsumsq[counter]);
                reduktionen++;
            }
        } //end compare distance precisely
    } //end compare y roughly
} //end compare x roughly
} //end j
} //end i
return reduktionen;
}
/*****end reduce_overlap*****/

/*****begin speedupdate*****/
void container::speed_update()
{
    static long double *xparspeed=new long double[KUGELANZAHL+1];
    //along connection of spherecenters
    static long double *yparspeed=new long double[KUGELANZAHL+1];
    static long double *xsenkspeed=new long double[KUGELANZAHL+1];
    //perpendicular to xparspeed
    static long double *ysenkspeed=new long double[KUGELANZAHL+1];

```

```

static const long double redacc=5./7.;
static const long double boundarytime = 1./(FREQUENZ*EDGENUMBER);
long double frictforce=981*MUE*boundarytime;
long double distanz3h2;
long double sigsquare;
long double xspeedvorher1 = 0;
long double yspeedvorher1 = 0;
long double xspeedvorher2 = 0;
long double yspeedvorher2 = 0;

static long double speed = (AMPLITUDE*FREQUENZ*8.*atan(1.))*1.0;
if (hit)
{
    if (colpartner1==0 || colpartner2==0)
    {
        //wallhit
        wallhitcounter++;
        int wallhit;
        if (colpartner1==0){wallhit=colpartner2;}
        else {wallhit=colpartner1;}

        distanz3h2 = xpos[wallhit]*xpos[wallhit]
        +ypos[wallhit]*ypos[wallhit];
        if (distanz3h2==0.)
        {cout<<"speedupdate: division by 0"<<endl;exit(-1);}

        vorspeed=xspeed[wallhit]*xspeed[wallhit]
        +yspeed[wallhit]*yspeed[wallhit];

        //before change

        xparspeed[wallhit] = (xspeed[wallhit]*xpos[wallhit]
        +yspeed[wallhit]*ypos[wallhit])
        *xpos[wallhit]/distanz3h2;

        yparspeed[wallhit] =(xspeed[wallhit]*xpos[wallhit]
        +yspeed[wallhit]*ypos[wallhit])*ypos[wallhit]/distanz3h2;

        xparspeed[0] =(xspeed[0]*xpos[wallhit]
        +yspeed[0]*ypos[wallhit])*xpos[wallhit]/distanz3h2;

        yparspeed[0] =(xspeed[0]*xpos[wallhit]
        +yspeed[0]*ypos[wallhit])*ypos[wallhit]/distanz3h2;
    }
}

```

```

        xsenkspeed[wallhit] = 0.;
        ysenkspeed[wallhit] = 0.;

//now velocities are changed

/*Shall the Katapult be used??*/

if(fabs(xparspeed[wallhit]) < 0.001)
{
    //Katapult
    wallkatcounter++;
    if(output){cout<<"Katapult is used"<<endl;}
    if(xparspeed[wallhit] < 0){xparspeed[wallhit] = speed;}
    else{xparspeed[wallhit] = -speed;}
    if(yparspeed[wallhit] < 0){yparspeed[wallhit] = speed;}
    else {yparspeed[wallhit] = -speed;}

    xspeed[wallhit] = xsenkspeed[wallhit] + xparspeed[wallhit];
    yspeed[wallhit] = ysenkspeed[wallhit] + yparspeed[wallhit];
}
//end Katapult
else
{
    if(mintimeadder - tctime[wallhit] <= TCTIME
    && tctime[wallhit] > 0)
    {
        //start TC-model
        xspeed[wallhit]=xsenkspeed[wallhit]-xparspeed[wallhit];
        yspeed[wallhit]=ysenkspeed[wallhit]-yparspeed[wallhit];
    }
    //end TC-model
    else
    {
        xspeed[wallhit] = xsenkspeed[wallhit]
        -BOUNDARYALPHA*xparspeed[wallhit];
        yspeed[wallhit] = ysenkspeed[wallhit]
        -BOUNDARYALPHA*yparspeed[wallhit];
    }
    //end generic wall-hit
}
//end not-Katapult
tctime[wallhit] = mintimeadder;
nachspped=xspeed[wallhit]*xspeed[wallhit]
+yspeed[wallhit]*yspeed[wallhit];
}
//end wallhit

else
{
    //start sphere-sphere

```

```

long double rxij,ryij,vxij,vyij,bij;
rxij = xpos[colpartner1] - xpos[colpartner2];
ryij = ypos[colpartner1] - ypos[colpartner2];
vxij = xspeed[colpartner1] - xspeed[colpartner2];
vyij = yspeed[colpartner1] - yspeed[colpartner2];

/* TC-Modell */

if(mintimeadder - tctime[colpartner1]
<= TCTIME && tctime[colpartner1] > 0
||mintimeadder - tctime[colpartner2]
<= TCTIME && tctime[colpartner1] > 0)
{
    bij = 2*(rxij * vxij + ryij * vyij)
        /(spheremass[colpartner1]+spheremass[colpartner2]);
}
else
{
    bij = ((BETA+SPHEREALPHA)/2)
        *2*(rxij * vxij + ryij * vyij)
        /(spheremass[colpartner1]+spheremass[colpartner2]);
}
sigsquare = (sphereradius[colpartner1]
+ sphereradius[colpartner2])
*(sphereradius[colpartner1]
+sphereradius[colpartner2]);
xspeedvorher1 = xspeed[colpartner1];
yspeedvorher1 = yspeed[colpartner1];
xspeedvorher2 = xspeed[colpartner2];
yspeedvorher2 = yspeed[colpartner2];
xspeed[colpartner1] = xspeedvorher1*(1+BETA)/2
+ xspeedvorher2*(1-BETA)/2 - bij*spheremass[colpartner2]
/(sigsquare)*rxij;
yspeed[colpartner1] = yspeedvorher1*(1+BETA)/2
+ yspeedvorher2*(1-BETA)/2 - bij*spheremass[colpartner2]
/(sigsquare)*ryij;
xspeed[colpartner2] = xspeedvorher2*(1+BETA)/2
+ xspeedvorher1*(1-BETA)/2 + bij*spheremass[colpartner1]
/(sigsquare)*rxij;
yspeed[colpartner2] = yspeedvorher2*(1+BETA)/2
+ yspeedvorher1*(1-BETA)/2 + bij*spheremass[colpartner1]
/(sigsquare)*ryij;
tctime[colpartner1] = mintimeadder;

```

```

tctime[colpartner2] = mintimeadder;
} //end sphere-sphere
} //end hit
else
{ //no hit, but begin friction
  for(int i = 1; i < KUGELANZAHL + 1; i++)
  {
    xspeed[i] += (-xspeed[0] + xspeed0alt) * redacc;
    if(xspeed[i] < 0.)
    {
      xspeed[i] += frictforce;
      if(xspeed[i] > 0.) xspeed[i] = 0.;
      goto end_xfr;
    }
    if(xspeed[i] > 0.)
    {
      xspeed[i] += -frictforce;
      if(xspeed[i] < 0.) xspeed[i] = 0.;
      goto end_xfr;
    }
    end_xfr: //done with the x-component

    yspeed[i] += (-yspeed[0] + yspeed0alt) * redacc;
    if(yspeed[i] < 0.)
    {
      yspeed[i] += frictforce;
      if(yspeed[i] > 0.) yspeed[i] = 0.;
      goto end_yfr;
    }

    if(yspeed[i] > 0.)
    {
      yspeed[i] += -frictforce;
      if(yspeed[i] < 0.) yspeed[i] = 0.;
      goto end_yfr;
    }
    end_yfr:
    continue;
  } //end i for sphere
} //end friction
}

/*****end speedupdate*****/

```

```

/*****begin sphere searcher*****/
int container::sphere searcher()
{
    int newtimecounter=0;//number of spheres to be calculated new
    static int *spherebridge=new int[KUGELANZAHL];
    static int *spheregarbage=new int[2*KUGELANZAHL+2];
    int bridgecounter=0;//return argument
    spherecounter = 0;

    if(hit)
    {
        //begin hit
        if (colpartner1 !=0)
        {
            spheregarbage[newtimecounter] =colpartner1;
            newtimecounter++;
        }
        if (colpartner2 !=0)
        {
            spheregarbage[newtimecounter] =colpartner2;
            newtimecounter++;
        }
        int endloop=newtimecounter;
        for(int h = 0;h < endloop;h++)
        {
            for(int i = 1;i < KUGELANZAHL+1;i++)
            {
                if(partnerall[i] == sphere[h])
                {
                    spheregarbage[newtimecounter]=i;
                    newtimecounter++;
                }
            }
        }
        //end for h
        if (newtimecounter>(2*KUGELANZAHL+2))
        {
            exit(-1);
        }

        /*Erase the doubles*/

        bridgecounter=0;
        spherebridge[bridgecounter] = spheregarbage[0];
        bridgecounter++;
    }
}

```



```

    for(int m = 0;m < newtimecounter;m++)
    {
        boolean doppel=false;
        for(int g = 0;g < bridgecounter;g++)
        {
            if(spheregarbage[m] == spherebridge[g])
                doppel=true;
        } //end for g
        if (!doppel)
        {
            spherebridge[bridgecounter]=spheregarbage[m];
            bridgecounter++;
        }
    } //end for m
    for(int a = 0; a < bridgecounter;a++)
        sphere[a]=spherebridge[a];
    spherecounter = bridgecounter;
} //end of hit
else //i.e. no hit: friction event
{ //begin friction event
    for(int kk = 0;kk < KUGELANZAHL;kk++)
    {
        sphere[kk] = kk+1;
    }
    spherecounter=KUGELANZAHL;
} //end friction event
return spherecounter;
}
/*****end sphere searcher*****/

```



# Literaturverzeichnis

- Aranson, I. S., Blair, D., Kaltsky, V. A., Crabtree, G. W., Kwok, W., Vinokur, V. M. & Welp, U. (2000), ‘Electrostatically driven granular media: Phase transition and coarsening’, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3306.
- Aumaître, S., Kruelle, C. A. & Rehberg, I. (2001), ‘Segregation in granular matter under horizontal swirling excitation’, *Phys. Rev. E* **64**, 041305.
- Aumaître, S., Schnautz, T., Kruelle, C. A. & Rehberg, I. (2003), ‘Granular phase transition as a precondition for segregation’, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 114302.
- Barrat, A. & Trizac, E. (2002), ‘Molecular dynamics simulations of vibrated granular gases’, *Phys. Rev. E* **66**, 051303.
- Barrat, A., Trizac, E. & Fuchs, J. N. (2001), ‘Heated granular fluids: The random restitution coefficient approach’, *Eur. Phys. J. E* **5**, 161.
- Behringer, R. P. (1993), ‘The dynamics of flowing sand’, *Nonlinear Science Today* **3**, 1.
- Bideau, D., Gervois, A., Oger, L. & Troadec, J. P. (1986), ‘Geometrical properties of disordered packings of hard disks’, *J. Physique* **47**, 1697.
- Bideau, D. & Troadec, J. P. (1984), ‘Compacity and mean coordination number of dense packings of hard discs’, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **17**, L731.
- Brahic, A. (1975), ‘A numerical study of a gravitating system of colliding particles: applications to the dynamics of saturn’s rings and to the formation of the solar system’, *Icarus* **25**, 452.
- Breu, A. P. J., Ensner, H. M., Kruelle, C. A. & Rehberg, I. (2003), ‘Reversing the brazil-nut effect: Competition between percolation and condensation’, *Phys. Rev. Lett.* **890**, 014302.
- Brilliantov, N. V., Spahn, F., Hertzsch, J. M. & Pöschel, T. (1996), ‘Model for collisions in granular gases’, *Phys. Rev. E* **53**, 5382.
- Brown, R. (1939), ‘Fundamental principles of segregation’, *J. Inst. Fuel* **13**, 15.

- Cassini (2005), '<http://www.saturn.jpl.nasa.gov/home/index.cfm> (15.01.05)'.
- Cerda, E., Melo, F. & Rica, S. (1997), 'Model for subharmonic waves in granular materials', *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4570.
- Chowhan, Z. T. (1995*a*), 'Segregation of particulate solids, part i', *Pharm. Technol.* **19**, 56.
- Chowhan, Z. T. (1995*b*), 'Segregation of particulate solids, part ii', *Pharm. Technol.* **19**, 80.
- Clément, E. & Rajchenbach, J. (1991), 'Fluidization of a bidimensional powder', *Europhys. Lett.* **16**, 133.
- Cooke, W., Warr, S., Huntley, J. M. & Ball, R. C. (1996), 'Particle size segregation in a two-dimensional bed undergoing vertical vibration', *Phys. Rev. E* **53**, 2812.
- Du, Y., Li, H. & Kadanoff, L. P. (1995), 'Breakdown of hydrodynamics in a one-dimensional system of inelastic particles', *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1268.
- Duran, J., Rajchenbach, J. & Clément, E. (1993), 'Arching effect model for particle size segregation', *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2431.
- Esposito, L. W. (2002), 'Planetary rings', *Rep. Prog. Phys.* **65**, 121741.
- Evesque, P. (1992), 'Shaking dry powders and grains', *Contemp. Phys.* **33**, 245.
- Falcon, É., Laroche, C., Fauve, S. & Coste, C. (1998), 'Collision of a 1-d column of beads with a wall', *Eur. Phys. J. B* **5**, 111.
- Falcon, É., Wunenburger, R., Evesque, P., Fauve, S., Chabot, C., Garrabos, Y. & Beysens, D. (1999), 'Cluster formation in a granular medium fluidized by vibrations in a low gravity', *Phys. Rev. Lett.* **83**, 440.
- Faraday, M. (1831), 'On a peculiar class of accoustical figures', *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **121**, 299.
- Félix, G. & Thomas, N. (2004), 'Evidence of two effects in the size segregation process in dry granular media', *Phys. Rev. E* **70**, 0513071.
- Goldmann, D., Shattuck, M. D., Bizon, J. M., McCormick, W. D., Swift, J. B. & Swinney, H. L. (1998), 'Absence of inelastic collapse in a realistic three ball model', *Phys. Rev. E* **57**, 4831.
- Goldreich, P. & Tremaine, S. (1975*a*), 'The formation of the cassini division in saturn's rings', *Icarus* **34**, 240.

- Goldreich, P. & Tremaine, S. (1975*b*), ‘The velocity dispersion in saturn’s rings’, *Icarus* **34**, 227.
- Helbing, D., Farkas, I. J. & Vicsek, T. (2000), ‘Freezing by heating in a driven mesoscopic system’, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1240.
- Hong, D. C., Quinn, P. V. & Luding, S. (2001), ‘Reverse brazil nut problem: Competition between percolation and condensation’, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3423.
- Huerta, D. A. & Ruiz-Suárez, J. C. (2004*a*), ‘Erratum: Vibration induced granular segregation: A phenomenon driven by three mechanisms’, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 114301.
- Huerta, D. A. & Ruiz-Suárez, J. C. (2004*b*), ‘Vibration induced granular segregation: A phenomenon driven by three mechanisms [phys. rev. lett. 92, 114301 (2004)]’, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 069901.
- Huthmann, M., Orza, J. A. & Brito, R. (2000), ‘Dynamics of deviations from the gaussian state in a freely cooling homogeneous system of smooth inelastic particles’, *Granular Matter* **2**, 189.
- Jaeger, H. M. & Nagel, S. R. (1996), ‘Granular solids, liquids, and gases’, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259.
- Jullien, R., Meakin, P. & Pavlovitsch, A. (1992), ‘Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking’, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 640.
- Kepler, J. (1611), *Strena Seu De Nive Sexangular*, G. Tampach, Francofurti.
- Knight, J. B., Jaeger, H. M. & Nagel, S. R. (1993), ‘Vibration-induced size separation in granular media: The convection connection’, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3728.
- Kondic, L. (1999), ‘Dynamics of spherical particles on a surface: Collision-induced sliding and other effects’, *Phys. Rev. E* **60**, 751.
- Kondic, L., Hartley, R. R., Tennakoon, S. G. H., Painter, B. & Behringer, R. P. (2003), ‘Segregation by friction’, *Europhys. Lett.* **61**, 742.
- Krouskop, P. E. & Talbot, J. (2003), ‘Mass and size effects in three-dimensional vibrofluidized granular mixtures’, *Phys. Rev. E* **68**, 021304.
- Kruelle, C. A., Aumaître, S., Breu, A. P. J., Goetzendorfer, A., Schnautz, T., Grochowski, R. & Walzel, P. (2004), ‘Phase transitions and segregation phenomena in vibrated granular systems’, *Adv. Solid State Phys.* **44**, 401.
- Kudrolli, A. (2004), ‘Size separation in vibrated granular matter’, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 209.

- Kudrolli, A. & Henry, J. (2000), ‘Non-gaussian velocity distributions in excited granular matter in the absence of clustering’, *Phys. Rev. E* **62**, 1489.
- Landau, J. D. & Lifschitz, E. M. (1984), *Lehrbuch der theoretischen Physik-statistische Physik*, Akademie-Verlag-Berlin, Berlin.
- Liffman, K., Metcalfe, G. & Cleary, P. (1997), ‘Granular convection and transport due to horizontal shaking’, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 4574.
- Losert, W., Cooper, D. G. W., Delour, J., Kudrolli, A. & Gollup, J. P. (1999a), ‘Velocity statistics in vibrated granular media’, *Chaos* **9**, 682.
- Losert, W., Cooper, D. G. W. & Gollup, J. P. (1999b), ‘Propagating front in an excited granular layer’, *Phys. Rev. E* **59**, 5855.
- Luding, S., Clément, E., Blumen, A. & Duran, J. (1994a), ‘Anomalous energy dissipation in molecular-dynamics simulations of grains: The detachment effect’, *Phys. Rev. E* **50**, 4113.
- Luding, S., Clément, E., Blumen, A. & Duran, J. (1994b), ‘Onset of convection in molecular dynamics simulations of grains’, *Phys. Rev. E* **50**, 1762.
- Luding, S., Duran, J., Clément, E. & Rajchenbach, J. (1996), ‘Segregation of particulate solids: Segregation via convection’, *Pharm. Technol.* **20**, 42.
- Luding, S. & McNamara, S. (1998), ‘How to handle the inelastic collapse of a dissipative hard-sphere gas with the tc model’, *Granular Matter* **1**, 111.
- Metcalfe, G., Tennakoon, S. G. K., Kondic, L., Schaefer, D. G. & Behringer, R. B. (2002), ‘Granular friction, coulomb failure, and the fluid-solid transition for horizontally shaken granular materials’, *Phys. Rev. E* **65**, 31302.
- Möbius, M. E., Lauderdale, S. R., Nagel, S. R. & Jaeger, H. M. (2001), ‘Size separation of granular particles’, *Nature* **414**, 270.
- Mullin, T. (2000), ‘Coarsening of self-organized clusters in binary mixtures of particles’, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4741.
- Olafsen, J. S. & Urbach, J. S. (1998), ‘Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer’, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4369.
- Painter, B. & Behringer, R. P. (2000), ‘Substrate interactions, effects of symmetry breaking, and convection in a 2d horizontally shaken granular system’, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3396.
- Pak, H. K. & Behringer, R. P. (1993), ‘Surface waves in vertically vibrated granular materials’, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1832.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. (1992), *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Puglisi, A., Loreto, V., Marini Bettolo Marconi, U. & Menon, N. (1999), ‘Kinetic approach to granular gases’, *Phys. Rev. E* **59**, 5582.
- Reis, P. M., Ehrhardt, G., Stephenson, A. & Mullin, T. (2004), ‘Gases, liquids and crystals in granular segregation’, *Europhys. Lett.* **66**, 357.
- Reis, P. M. & Mullin, T. (2003), ‘Granular segregation as a critical phenomenon’, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 244301.
- Reynolds, O. (1885), ‘On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact’, *Phil. Mag.* **50**, 469.
- Ristow, G. H. (1997), ‘Critical exponents for granular phase transitions’, *Europhys. Lett.* **40**, 625.
- Ristow, G. H., Straßburger, G. & Rehberg, I. (1997), ‘Phase diagram and scaling of granular materials under horizontal vibrations’, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 833.
- Rosato, A., Strandburg, K. J., Prinz, F. & Swendsen, R. H. (1987), ‘Why the brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking’, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1038.
- Rouille, L., Misiaen, J.-M. & Thomas, G. (1990), ‘Collective random packing of disks in a plane under the influence of a weak central force’, *J. Phys. Condens. Matter* **50**, 469.
- Rouyer, F. & Menon, N. (2000), ‘Velocity fluctuations in a homogeneous 2d granular gas in steady state’, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3676.
- Rubinstein, M. & Nelson, D. R. (1982), ‘Order and deterministic chaos in hard-disk arrays’, *Phys. Rev. B* **26**, 6254.
- Sánchez, P., Swift, R. & King, P. J. (2004), ‘Stripe formation in granular mixtures due to the differential influence of drag’, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 184302.
- Scherer, M. A., Buchholz, V., Pöschel, T. & Rehberg, I. (1996), ‘Swirling granular matter: From rotation to reptation’, *Phys. Rev. E* **54**, 4560.
- Scherer, M. A., Kötter, K., Markus, M., Goles, E. & Rehberg, I. (2000), ‘Swirling granular solidlike clusters’, *Phys. Rev. E* **61**, 4069.
- Scherer, M. A., Mahr, T., Engel, A. & Rehberg, I. (1998), ‘Granular dynamics in a swirled annulus’, *Phys. Rev. E* **58**, 6061.

- Schmidt, J. & Salo, H. (2003), ‘Weakly nonlinear model for oscillatory instability in saturn’s dense rings’, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 611021.
- Schnautz, T., Brito, R., Kruele, C. A. & Rehberg, I. (2004), ‘A horizontal brazil-nut effect – and its reverse’, *Phys. Rev. Lett.* . eingereicht.
- Shinbrot, T. (2004), ‘The brazil nut effect – in reverse’, *Nature* **429**, 352.
- Shinbrot, T. & Muzzio, F. J. (1998), ‘Reverse buoyancy in shaken granular beds’, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4365.
- Shinbrot, T. & Muzzio, F. J. (2001), ‘Noise to order’, *Nature* **410**, 251.
- Shishodia, N. & Wassgreen, R. (2001), ‘Particle segregation in vibrofluidized beds due to buoyant forces’, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 084302.
- Straßburger, G. & Rehberg, I. (2000), ‘Crystallization in a horizontally vibrated monolayer of spheres’, *Phys. Rev. E* **62**, 2517.
- Trujillo, L., Alam, M. & Herrmann, H. J. (2003), ‘Segregation in a fluidized binary granular mixture: Competition between buoyancy and geometric forces’, *Europhys. Lett.* **64**, 190.
- Umbanhowar, P. B., Melo, F. & Swinney, H. L. (1996), ‘Localized excitations in a vertically vibrated layer’, *Nature* **382**, 3838.
- Visscher, V. M. & Bolsterli, M. (1972), ‘Random packing of equal and unequal spheres in two and three dimensions’, *Nature* **239**, 504.
- Williams, J. C. (1976), ‘The segregation of particulate materials’, *Pharm. Technol.* **15**, 245.



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen danken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben:

Ingo Rehberg für seine Unterstützung bei fachlichen und numerischen Problemstellungen. Auf seine kühne Art, mit viel Geduld und Diskussionsfreude, hat er meine Arbeit begleitet und mir außerdem die Teilnahme am europäischen Graduiertenkolleg ermöglicht.

Christof Krülle für die zahlreichen fachlichen Gespräche, die intensive Zusammenarbeit bei den Veröffentlichungen unserer Ergebnisse und die Durchsicht dieses Manuskriptes. Weiterhin bin ich ihm sehr dankbar für die Kontaktfreudigkeit während meines Studiums in Münster und der daraus resultierenden Zusammenarbeit in Bayreuth.

Ricardo Brito für die freundliche Aufnahme an der Universidad Complutense in Madrid, die ergiebige Unterstützung zur Erstellung der numerischen Simulation und für den erinnerungswürdigen Aufenthalt in der Hauptstadt Spaniens.

Sébastien Aumaître für die Einführung in das Schwenkexperiment.

Den Mitgliedern der Sandgruppe, insbesondere Andreas Breu, Andreas Götzendorfer, Jennifer Kreft und Camilla Völtz für hilfreiche Gespräche rund um granulare Fragestellungen.

Klaus Ötter für die technische Beratung und Realisierung des experimentellen Aufbaus sowie für außeruniversitäre Hilfestellungen auf dem Gebiet der Mechanik.

Wolfgang Schöpf für viele fachliche und nichtfachliche Diskussionen sowie die freudigen Touren ins Nachbarland des Wintersports.

Den Mitgliedern der Ferrofluid- und Flüssigkristallgruppe am Lehrstuhl, insbesondere Peter Rupp, Alexander Rothert, Thomas Bock und Alberto de Lózar.

Anna Butsch für die Messungen des geschwindigkeitsabhängigen Restitutionskoeffizienten.

Christine Linser für zahlreiche und vor allem hilfreiche Ratschläge innerhalb und außerhalb des universitären Bereichs.

Meinen Eltern, Heidi und Hans-Jürgen Schnautz und meiner Schwester, Tanja Schnautz-Bieker für die nicht nur moralische Unterstützung während der gesamten Promotionszeit.

Meiner Freundin, Tina Stagge, für die unendlich schöne gemeinsame Zeit und vieles mehr.